Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 4, kevät 2013

Palautus pe 24.5. klo 16.00 mennessä

1. Ratkaise Dirichlet–ongelma

$$\Delta u(x,y) = 0,\ x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x,y) = y + x^2,\ \text{kun}\ x^2 + y^2 = 1.$$

2. Todista, että jokainen origokeskisessä a–säteisessä kiekossa harmoninen, ei–negatiivinen funktio u toteuttaa ns. Harnackin–epäyhtälön

$$\frac{a-r}{a+r}u(0,0) \le u(x,y) \le \frac{a+r}{a-r}u(0,0),\ 0 < r = \sqrt{x^2+y^2} < a.$$

Vihje: Käytä Possonin kaavaa.

3. Etsi joukossa $\{(x,y);\ x^2 + y^2 > 4\}$ harmoninen funktio u, jolle

$$u(x,y) = y,\ \text{kun}\ x^2 + y^2 = 4,$$

ja

$$\lim_{|x|+|y|\to\infty} u(x,y) = 0.$$

4. Määrää Cauchy–ongelman

$$u_{tt} - c^2\Delta_x u = 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 1,\ u_t(x,0) = 1 + |x|^2/2,$$

radiaalinen ratkaisu.

5. Määrää Cauchy–ongelman

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = ae^{-|x|^2},\ u_t(x,0) = be^{-|x|^2},$$

radiaalinen ratkaisu.

6. Oletetaan, että C^1–vektorifunktiot $E(x,t)$ ja $B(x,t)$ ($x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$) toteuttavat *Maxwell–yhtälöt*

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = \nabla \times B(x,t),$$

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} = -\nabla \times E(x,t),$$

$$\nabla_x \cdot E(x,t) = \nabla_x \cdot B(x,t) = 0.$$

Osoita, että E:n ja B:n jokainen komponenttifunktio toteuttaa aaltoyhtälön

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0.$$

Vihje: Käytä identiteettiä $(\nabla\times)^2 = \nabla\nabla \cdot -\Delta$.

7. Oletetaan, että u toteuttaa Cauchy–ongelman

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}^3,$$

missä f, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Osoita, että on olemassa vakio C siten että

$$|u(x,t)| \le C/t,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0.$$

Todista myös vastaava estimaatti tason tapauksessa.

8. Tarkastellaan Cauchy–ongelmaa yksiulotteiselle aaltoyhtälölle

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Oletaan, että $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ on tämän ratkaisu, ja f:llä ja g:llä on kompaktit kantajat. Määritellään *kineettinen energia* kaavalla

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)\,dx,$$

ja *potentiaalienergia* kaavalla

$$p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,dx.$$

Osoita, että (a) $k(t)+p(t)$ on vakio, ja että (b) riittävän suurilla t pätee $k(t) = p(t)$. **Vihje**: Osa tehtävistä löyytyy luentojen alkupuolelta.

9. Todista harmonisten funktioiden keskiarvoperiaate $\mathbb{R}^3$:ssa käyttäen Euler-Poisson-Darbooux- yhtälöä. **Huom.** Tämän voi toki helpommin osoittaa suoraan, mutta tarkoitus on tässä osoittaa, että harmonisia funktioita voi myös käsitellä ajasta riippumattomina aaltoyhtälön ratkaisuina.

10. Ratkaise Cauchy–ongelma

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = x + t,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x_2 + x_2,\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

11. Tarkastellaan Cauchy–ongelmaa *lennätinyhtälölle*,

$$w_{tt} = c^2 w_{xx} - c^2 \lambda^2 w,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$w(x,0) = 0,\ \ w_t(x,0) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että

$$w(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} J_0(\lambda s) f(y)\, ds,$$

missä $s^2 = c^2 t^2 - (x-y)^2$, ja

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z\, \sin\theta)\, d\theta$$

on (kertaluvun nolla) Bessel–funktio. **Vihje:** Osoita, että funktio

$$u(x,y,t) = \cos(\lambda y) w(x,t)$$

toteuttaa kaksiulotteisen aaltoyhtälön. Määrää u käyttäen luennoilla annettua kaavaa.

12. Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^{3+1}$ pinta, jolla on parametriesitys

$$S:\ \{(x,t);\ t = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^3\},$$

miss $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Olkoot $f,\ g \in C^\infty(S)$ ja $w \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Oletetaan, että pinta S on *ei–karakteristinen*, eli että

$$1 - c^2 |\nabla\varphi(x)|^2 \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Osoita, että on olemassa C^∞–funktiot a_i, $i = 0, \ldots, 4$, siten että funktio

$$v(x,t) = \sum_{i=0}^{4} a_i(x)(t - \varphi(x))^i$$

toteuttaa

$$v|_S = f,\ v_t|_S = g,\ (\Box v - w)|_S = 0,$$

missä

$$\Box = \partial_{tt} - c^2\Delta$$

on *aalto–operaattori.*

13. Jatkoa edelliseen tehtävään. Tarkastellaan nyt Cauchy–ongelmaa alkuarvopintana S:

$$\Box u = w,\ t > \varphi(x), \tag{0.1}$$

$$u|_S = f,\ u_t|_S = g. \tag{0.2}$$

Olkoon v edellisessä tehtävässä konstruoitu funktio, ja määritellään $W(x,t) = w(x,t) - \Box v(x,t)$. Osoita, että funktio

$$W^*(x,t) = \begin{cases} W(x,t), & t \geq \varphi(x) \\ 0, & t < \varphi(x) \end{cases}$$

kuuluu avaruuteen $C^2(\mathbb{R}^n)$, ja että $U = u - v$ toteuttaa Cauchy–ongelman

$$\Box U = W^*,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{0.3}$$

$$U(x,0) = U_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}^3. \tag{0.4}$$

14. Olkoon U ongelman (0.3)-(0.4) ratkaisu. Oletetan, että alkuarvopinta S on *paikankaltainen*, eli

$$1 - c^2|\nabla\varphi(x)|^2 > 0.$$

Osoita, että $u = U + v$ toteuttaa Cauchy–ongelman (0.1)-(0.2). **Vihje:** Riittää osoittaa, että $U = 0$ kun $t < \phi(x)$. Osoita, että $W^*(y,s)$ häviä (x,t)–kärkisessä menneisyyteen osoittavassa valokartiossa, ja käytä Duhamelin periaatetta yhdessä paikankaltaisuusehdon kanssa.