

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 1, kevät 2013

Palautus ma 11.2 klo 16.00 mennessä

1. Tarkastellaan alkuarvo-ongelmaa

$$u_x + u_y = 1, \quad u(x, 0) = f(x). \quad (0.1)$$

Ratkaise karakteristiset käyrät, ja määrää niiden projektiot (x, y) -tasoon.

2. Määrää alkuarvo-ongelman (0.1) ratkaisu.
3. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$xu_x + (x + y)u_y = 1, \quad u(1, y) = y.$$

Onko ratkaisu määritelty koko tasossa?

4. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$u_x + u_y = u^2, \quad u(x, 0) = 1.$$

5. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$u^2 u_x + u_y = 0, \quad u(x, 0) = x^2,$$

vasemmassa puolitasossa $\{(x, y); x > 0\}$.

6. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$xu_x + (x^2 + y)u_y + (y/x - x)u = 1, \quad u(1, y) = 0$$

kun $x > 0$, ja laske $u(3, 6)$. Onko ratkaisu määritelty koko positiivisella reaaliakselilla?

7. Tarkastellaan alkuarvo-ongelmaa

$$xu_x + yu_y = 2u, \quad u(x, 0) = x^2, \text{ kun } x > 0.$$

Osoita, että tällä on kaksi eri ratkaisua, ja selitä miksi tämä ei ole ristiriidassa luentojen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen kanssa.

8. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$xuu_x + yuu_y = u^2 - 1, \quad u(x, x^2) = x^3, \quad x > 0.$$

9. Tarkastellaan yhtälöä

$$uu_x + u_y = -\frac{1}{2}u. \tag{0.2}$$

Osoita, että alkuarvokäyrän $\mathbb{R} \ni s \mapsto (s, 0, \sin s)$ jossain ympäristössä on olemassa yksikäsitteinen yhtälön (0.2) ratkaisu.

10. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$uu_x + u_y = -\frac{1}{2}u, \quad u(x, 0) = \sin(x).$$