Moniulotteiset aikasarjat kl 2013, HT 4, viikko 7

1. Osoita oikeaksi seuraavat derivointikaavat, joissa x on $n \times 1$ vektori (ks. Liite A.7). Kolmatta kaavaa käytetään derivoitaessa (normaalisesta) VAR(p)–mallista johdettua log–uskottavuusfunktiota.

(i) $\partial a'x/\partial x = a$ ($a \quad n \times 1$) ja edelleen $\partial Ax/\partial x = A'$ ($A \quad m \times n$)
(ii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} x'Ax &= (A + A')x \\ &= 2Ax, \quad \text{kun} \quad A = A' \quad (A \quad n \times n)\,. \end{aligned}$$

(iii) Kun $B = B'$ ja dimensiot ovat laskutoimituksiin sopivat,

$$\frac{\partial}{\partial x} (c - Ax)' B (c - Ax) = -2A'Bc + 2A'BAx.$$

2. Tarkastellaan kaksiulotteisesta stationaarisesta prosessista $y_t = (y_{1t}, y_{2t})$ saatua realisaatiota $y_1, ..., y_T$. Oletetaan, että komponenttiprosesseista y_{1t} ja y_{2t} tiedetään, että $y_{it} \sim \mathsf{iid}\left(\mu_i, \omega_i^2\right)$ $(i = 1, 2)$. Hyödyntäen tätä tietoa johda pelkästään ristikorrelaatioestimaattoreihin $r_{12,k}$, $k = -K, ..., K$ perustuva asymptoottisesti χ^2–jakautunut testi nollahypoteesille, joka väittää, että y_{1t} ja y_{2t} ovat riippumattomia iid–prosesseja.

Vihje: Monisteen s. 20 ja tulos $X'X = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 \sim \chi_m^2$, kun $X = (X_1, ..., X_m)$ ja $X_1, ..., X_m$ ovat riippumattomia ja $\mathsf{N}\,(0, 1)$–jakautuneita.

3. Edellisen tehtävän testi voidaan tehdä realistisemmaksi seuraavasti. Oletetaan, että y_{1t}:n ja y_{2t}:n tiedetään olevan ARMA–prosesseja, joiden asteet tunnetaan (käytännössä selvitetään aineistoa käyttäen). Estimoidaan nämä ARMA–prosessit SU–menetelmällä ja lasketaan residuaalit $\hat{\varepsilon}_{1t}$ ja $\hat{\varepsilon}_{2t}$, jotka toteuttavat likimain edellisessä tehtävässä prosesseilta y_{1t} ja y_{2t} vaaditut iid–ominaisuudet. Voidaan osoittaa, että prosessien y_{1t} ja y_{2t} ollessa riippumattomat näistä residuaaleista lasketuilla ristikorrelaatioestimaattoreilla on monisteen s. 20 mainitut asymptoottiset ominaisuudet, joten edellisen tehtävän testiä voidaan soveltaa residuaaleihin $\hat{\varepsilon}_{1t}$ ja $\hat{\varepsilon}_{2t}$ ja tutkia näin prosessien y_{1t} ja y_{2t} riippumattomuutta.

Monisteen Kuvion 3.1 aikasarjoille $dexch_t$ (y_{1t}) ja $rdif_t$ (y_{2t}) havaittiin AR(2)–mallit riittäviksi ja niiden residuaaleista laskettiin seuraavat ristikorrelaatiot $(T = 131)$.

k	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$r_{12,k}$	0.03	-0.22	-0.12	0.17	-0.19	0.11	0.12	0.05	0.07	-0.01

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{12,k}$	-0.26	0.16	0.04	-0.15	0.05	-0.01	-0.07	0.15	-0.08	-0.15	0.11

Tutki voidaanko muuttujien $dexch_t$ ja $rdif_t$ välisiä ristikorrelaatioita pitää nollina. Käytä edellisen tehtävän testiä (jollain K:n arvolla) ja arvioi riippuvuutta myös yksittäisten ristikorrelaatioestimaattien avulla.

4. Osoita, että monisteen yhtälössä (4.3) esiintyvän parametrimatriisin Π SU–estimaattori on

$$\hat{\Pi} = \sum_{t=1}^{T} y_t x_t' \left(\sum_{t=1}^{T} x_t x_t' \right)^{-1} .$$

Esitä tämä estimaattori myös käyttäen matriiseja $\boldsymbol{Y}' = [y_1 : \cdots : y_T]$ $(n \times T)$ ja $\boldsymbol{X}' = [x_1 : \cdots : x_T]$ $((np+1) \times T)$. Osoita lisäksi, että $\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t x_t' = 0$, kun $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\Pi} x_t$.