

## Moniulotteiset aikasarjat kl 2013, HT 3, viikko 6

1. Osoita oikeaksi monisteen s. 14 mainittu tulos

$$a' \text{MSE}(\tilde{Y})a \geq a' \text{MSE}(E(Y|X))a$$

kaikilla dimensioltaan sopivilla vektoreilla  $a$ .

*Vihje:* Voit siirtyä tarkastelemaan lineaarikombinaatioita  $a'Y$  ja  $a'\tilde{Y}$  ja olennaisesti palauttaa tilanteen yksiulotteiseksi.

2. Tarkastellaan stationaarista VAR(p)-prosessia  $y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \Omega)$ , jossa  $\Omega$  on positiivisesti definiitti.

(i) Johda lauseke lineaarikombinaation  $a'y_t$  optimaaliselle ennusteelle  $E_{t-1}(a'y_t) = E(a'y_t | y_{t-1-j}, j \geq 0)$  ja ennustevirheen varianssille (tässä  $a$  on nollasta poikkeava  $n \times 1$  vakiovektori). Totea, että ennustevirheen varianssi on positiivinen.

(ii) Merkitään  $\mathbf{y}_t = [y_t' \dots y_{t-p+1}']'$ . Käyttäen edellistä kohtaa osoita, että sv:n  $\mathbf{y}_t$  kovarianssimatriisi  $\text{Cov}(\mathbf{y}_t) = \mathbf{\Gamma}_0$  (ks. monisteen s. 12) on epäsingulaarinen eli kääntyvä (tätä tulosta käytettiin HT:n 2.4 ratkaisussa).

*Vihje:* Tee kohdassa (ii) vastaoletus, että  $\mathbf{\Gamma}_0$  on singulaarinen ja päätele, että tällöin on olemassa nollasta poikkeava vakiovektori  $\mathbf{a} = [a_1' \dots a_p']'$  ( $a_i$   $n \times 1$ ) siten, että  $\mathbf{a}'\mathbf{y}_t = 0$  (todennäköisyydellä yksi). Oleta ensin, että  $a_1 \neq 0$  ja päätele edelleen, että lineaarikombinaation  $a_1'y_t$  optimaalisen ennusteen ennustevirheen varianssi on nolla, mikä on ristiriidassa edellisen kohdan tuloksen kanssa. Jos  $a_1 = 0$ , voidaan tapauksessa  $a_2 \neq 0$  menetellä kuten edellä tapauksessa  $a_1 \neq 0$  ja näin voidaan jatkaa induktiivisesti tapaukseen  $a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$  ja  $a_p \neq 0$ , jossa ristiriidan voi johtaa prosessin määrittely-yhtälön tai lineaarisen esityksen avulla. Tulos voidaan perustella myös muulla kuin edellä kuvatulla tavalla.

3. Perustele yksityiskohtaisesti monisteen s. 15 esitetty ennustevirheen keskineliövirhematriisiin lauseke  $\sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \Omega \Psi_j'$  ja, kun  $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \Omega)$ , samalla sivulla mainittu ennustevirheen normaalisuustulos.

*Vihje:* Vetoa jälkimmäisessä osassa sopivaan multinormaalijakauman ominaisuuteen.

4. Perustele monisteen liitteen s. 5 esitetty tulos, jonka mukaan polynomi  $p(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$  voidaan kirjoittaa

$$p(z) = p(1) + (1-z)q(z),$$

jossa

$$q(z) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k z^k, \quad b_k = - \sum_{j=k+1}^m a_j.$$

*Huom.:* Tulos yleistyy potenssisarjoille (eli tapaukseen  $m = \infty$ ), kunhan tuloksessa esiintyvät potenssisarjat ovat hyvin määriteltyjä, minkä takaa monisteen liitteessä

A.4 mainittu ehto  $\sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| < \infty$ . Yleistykset edelleen matriisitapaukseen ovat suoraviivaisia ja niistä saadaan monisteen s. 19 käytetty tulos  $\Psi(\mathbf{B}) = \Psi(1) + \Delta G(\mathbf{B})$ .

*Vihje:* Yksi tapa ratkaista tehtävä perustuu siihen, että kaksi polynomia ovat samat, jos niiden kertoimet ovat samat.