Moniulotteiset aikasarjat kl 2013, HT 2, viikko 5

1. Olkoon matriisi $\boldsymbol{A}$ kuten HT:ssä 1.4 (tai monisteen s. 8). Osoita (determinanttiin perustuvan ominaisarvoyhtälön ja determinantin ominaisuuksien avulla), että $\boldsymbol{A}$:n kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä jos ja vain jos monisteen ehto (2.9) pätee eli

$$\det\left(I_{np} - \boldsymbol{A}z\right) \neq 0, \quad |z| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C})\,.$$

Vihje: Yksi tapa todeta ekvivalenssi suuntaan, jossa $\boldsymbol{A}$:n kaikki ominaisarvot oletetaan ykköstä pienemmiksi, perustuu vastaoletukseen.

2. Osoita HT:n 1.4 tuloksen avulla, että monisteen ehdot (2.9) ja (2.13) ovat yhtäpitäviä.

Vihje: Yksi tapa todeta ekvivalenssi on lähteä ensin oletuksesta, että (2.13) pätee ja sitten oletuksesta, että (2.13) ei päde.

3. Oletetaan, että $n \times n$ matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ovat erisuuria ja itseisarvoltaan ykköstä pienempiä eli $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, ..., n$. Osoita HT:ää 1.3 käyttäen, että tällöin sarjat $\sum_{j=0}^{\infty} A^j$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} \left\| A^j \right\|$ suppenevat ja lisäksi, että $\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I_n - A)^{-1}$.

Huom.: Kun suppeneminen on todettu, voidaan tulos $\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I_n - A)^{-1}$ todeta helposti myös ilman oletusta ominaisarvojen erisuuruudesta. Suppeneminen voidaan puolestaan todeta ilman tätä oletusta käyttäen matriisin A Jordanin hajotelmaa (ks. Liite A.2), mutta perustelusta tulee jonkin verran hankalampi. Kompleksiset ominaisarvot eivät aiheuta hankaluuksia, sillä niissä voidaan tarkastella reaali- ja imaginaariosia erikseen.

4. Ratkaise monisteen s. 12 johdetuista Yule-Walker -yhtälöistä

$$\Gamma'_k = A_1 \Gamma'_{k-1} + \cdots + A_p \Gamma'_{k-p}, \quad k > 0,$$

kerroinmatriisit $A_1, ..., A_p$ kovarianssimatriisien $\Gamma'_0, ..., \Gamma'_p$ funktiona.