Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 6
25.2.-1.3.2013

1. Olkoot $A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja siten, että jokainen $\mathbb{R}^n$:n piste kuuluu korkeintaan p:hen joukkoon A_j. Osoita, että

$$\sum_{j=1}^{k} m(A_j) \leq pm(\bigcup_{j=1}^{k} A_j).$$

2.Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin^k x + x}} dx.$$

Ja, kuten aina, perustele päättelysi.

3. Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{k(x-1)x} + x}} dx.$$

4. Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx.$$

5.Todista laskeva monotonisen konvergenssin lause:
Jos $f_k : A \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, ovat mitallisia funktioita siten, että $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$ ja $\int_A f_1 < \infty$, niin

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k = \int_A \lim_{k\to\infty} f_k.$$

6. Olkoon $f : A \to [0, \infty]$ mitallinen funktio, jolle $\int_A f < \infty$. Osoita, että joukoille $A_k = \{x \in A : f(x) > k\}, k \in \mathbb{N}$, on $\lim_{k\to\infty} km(A_k) = 0$.