Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 7
Ylimääräiset harjoitukset 2013

Näillä tehtävillä voi korottaa laskuharjoituksista saatavien lisäpisteiden määrää. Palautettava kirjallisesti joko luennoitsijalle tai laskuharjoitusten pitäjälle viimeistään perjantaina 1.3. klo 16. Ratkaisuehdotukset tulevat verkkoon 1.3. illalla.

1. Todista, että $m^*(\{e^x : x \in A\}) = 0$, jos $A \subset \mathbb{R}$ ja $m^*(A) = 0$.

2. Olkoon $A_j \subset [0,1], j \in \mathbb{N}$, mitallisia joukkoja, joille

$$m(A_j) > \frac{2^j - 1}{2^j}.$$

Osoita, että leikkausjoukko $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ on epätyhjä.

3. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio. Asetetaan $g(x) = 1/f(x)$, kun $f(x) \neq 0$, ja $g(x) = \infty$, kun $f(x) = 0$. Osoita, että g on mitallinen.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integroituva funktio. Osoita, että jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $m(A) < \infty$ ja $\int_{\mathbb{R}^n \setminus A} |f| < \epsilon$.

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^{\infty} (\frac{1}{x} \cos(\frac{1}{x}))^k dx.$$

6. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio ja

$$f_k(x) = \frac{\cos(f(x))}{1 + kf(x)^2}, k \in \mathbb{N}.$$

Osoita, että funktiot f_k ovat integroituvia yli välin $[0,1)$ ja että on olemassa raja-arvo

$$a = \lim_{k \to \infty} \int_0^1 f_k(x) dx.$$

Mitä arvoja a voi saada, kun f käy läpi kaikki mitalliset funktiot $f : [0,1] \to \mathbb{R}$?