Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 5
18.2-22.2.2013

1. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \to \mathbb{R}$. Osoita, että jos joukko $\{x \in A : f(x) < q\}$ on mitallinen kaikilla $q \in \mathbb{Q}$, niin
(a) A on mitallinen,
(b) f on mitallinen.

2. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f_j : A \to \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia funktioita. Osoita, että
(a) joukot $\{x \in A : f_j(x) < f_{j+1}(x)\}, j \in \mathbb{N}$, ovat mitallisia,
(b) joukko $\{x \in A :$ jono $(f_j(x))$ on aidosti kasvava$\}$ on mitallinen.

3. (a) Osoita, että jokainen kasvava funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen.
(b) Osoita, että jos $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kasvava, niin $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

4. Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on alhaalta puolijatkuva, jos $f(x) \leq \liminf_{j\to\infty} f(x_j)$ aina, kun $x_j \in \mathbb{R}^n$ ja $x = \lim_{j\to\infty} x_j$. Osoita, että jokainen alhaalta puolijatkuva funktio on mitallinen.

5. Määritä seuraavien jonojen ala- ja yläraja-arvot $\liminf_{j\to\infty} a_j$ ja $\limsup_{j\to\infty} a_j$:

$$(a)\ a_j = (1 + j\sin(j\pi/4))/j,$$
$$(b)\ a_j = (-1)^j \frac{j^3 + j^2}{2j^3 - j}.$$

6. Anna esimerkki jonosta jatkuvia funktoita $f_j : [0,1] \to \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$, siten, että $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$, mutta Riemannin integraalien $\int_0^1 f_j(x)dx$ jonolla ei ole raja-arvoa.