Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 4
11.2-15.2.2013

1. Osoita, että

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ ja } 0 < x^2 + y^3 \le 1\}$$

on mitallinen.

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Osoita, että joukko

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}$$

on Borelin joukko.

3. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Osoita, että jos $A \in \Gamma$ ja $B \in \Gamma$, niin

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

4. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $A_j \in \Gamma, j = 1, 2, \ldots$. Merkitään

$$\liminf_{j\to\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j \text{ ja } \limsup_{j\to\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$

Osoita, että
(a)

$$\liminf_{j\to\infty} A_j \in \Gamma, \ \limsup_{j\to\infty} A_j \in \Gamma$$

ja

$$\mu(\liminf_{j\to\infty} A_j) \le \lim_{k\to\infty} (\inf_{j\ge k} \mu(A_j)),$$

b)

$$\mu(\limsup_{j\to\infty} A_j) \ge \lim_{k\to\infty} (\sup_{j\ge k} \mu(A_j)), \text{ jos } \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) < \infty,$$

ja
(c) $\mu(\limsup_{j\to\infty} A_j) = 0$, jos $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$ (Borel-Cantelli lemma).

Jatkuu kääntöpuolella.

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mitallinen kuvaus. Osoita, että joukko

$$\{x \in \mathbb{R}^n : m(f^{-1}(\{x\}) > 0\}$$

on numeroituva.

6. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \to \mathbb{R}^m$. Todista, että jos on olemassa joukot $A_j, j \in \mathbb{N}$, siten, että $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ ja rajoittumakuvaus $f|A_j$ on mitallinen kaikilla $j \in \mathbb{N}$, niin f on mitallinen.