Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 3
4.2-8.2.2013

1. Osoita, että
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\}$$
on mitallinen ja $m(A) = 0$.

2. Olkoot $A, B, E \subset \mathbb{R}^n$ siten, että A ja B ovat mitallisia, $m(B) = 0$ ja
$$A \setminus B \subset E \subset A \cup B.$$
Osoita, että E on mitallinen ja $m(E) = m(A)$.

3. Olkoon ∂E joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ reuna (ts. $\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus E}$). Osoita, että jos $m^*(\partial E) = 0$, niin E on mitallinen. Anna esimerkki mitallisesta joukosta E, jolle $m^*(\partial E) > 0$.

4. Osoita, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $G \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset G$ ja $m^*(G \setminus A) < \epsilon$.
Ohje: tarkastele ensin tapausta, jossa $m^*(A) < \infty$, ja käytä tietoa, että jokainen $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva yhdiste tällaisista joukoista.

5. Osoita, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa suljettu joukko $F \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $F \subset A$ ja $m^*(A \setminus F) < \epsilon$.

6. Olkoot $E_i \subset \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}$, mitallisia joukkoja siten, että $m(E_i \cap E_j) = 0$, kun $i \neq j$. Todista, että
$$m(\bigcup_i E_i) = \sum_i m(E_i).$$