Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 2
28.1-1.2.2013

1. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Merkitään

$$A + y = \{x + y : x \in A\} \text{ ja } rA = \{rx : x \in A\}.$$

Todista, että

$$m_n^*(A + y) = m_n^*(A) \text{ ja } m_n^*(rA) = r^n m_n^*(A).$$

2. Pätevätkö seuraavat väitteet:
(a) Jos $m^*(A) > 0$, niin A sisältää epätyhjän avoimen joukon?
(b) Jos $m^*(A) < \infty$, niin A on rajoitettu?

3. Osoita, että

$$m^*(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = x^2\}) = 0.$$

4. Osoita, että

$$m^*(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, 0 < y < 1/x^2\}) < \infty.$$

5. Osoita, että jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $0 < L < \infty$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ kaikilla } x, y \in \mathbb{R},$$

toisin sanoen f on L-Lipschitz funktio, niin kaikilla $A \subset \mathbb{R}$,

$$m^*(f(A)) \leq Lm^*(A).$$

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Todista, että
(a) jos $\epsilon > 0$, on olemassa avoin joukko G siten, että $A \subset G$ ja $m^*(G) \leq m^*(A) + \epsilon$,
(b) on olemassa avoimet joukot G_j siten, että $A \subset G_{j+1} \subset G_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $m^*(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j) = m^*(A)$.