Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 1
21-25.2.2013

1. (a) Määritä $\inf E$ ja $\sup E$, kun $E = \{1/x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
(b) Määritä $\inf([0, 1] \setminus \mathbb{Q})$.
(c) Olkoon $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ ja $-A = \{x : -x \in A\}$. Osoita, että $\sup(-A) = -\inf A$.

2. Olkoon $A \subset [0, 1/2[$ sellainen, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $x \in A$, jolle $x - x^3 < \epsilon + \sqrt{\epsilon}$. Osoita, että $\inf A = 0$.

3. Olkoot $f : X \to Y$ kuvaus, $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ perhe X:n osajoukkoja ja $A \subset X$.
(a) Osoita, että

$$f(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} f(V_\alpha).$$

Anna esimerkki tapauksesta, jossa inkluusio on aito.
(b) Osoita, että jos f on injektio, niin

$$f(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} f(V_\alpha)$$

ja

$$f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A).$$

4. Olkoot $a_i, i \in I$, positiivisia reaalilukuja. Osoita, että jos $\sum_{i \in I} a_i < \infty$, niin I on numeroituva.

5. Todista, että jokainen $\mathbb{R}^n$:n avoin osajoukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä avoimia kuulia.

6. Olkoon $A \subset [1, 3]$. Todista, että

$$m^*(\{x^2 : x \in A\}) \leq 6m^*(A).$$

Voiko lukua 6 korvata millään pienemmällä luvulla? Voit olettaa tunnetuksi, että $\mathbb{R}$:n välin ulkomitta on sen pituus.