Tehtävän 1 ratkaisu. Funktio $f(x,y) = x\sqrt{1+3x^2y^3} + 2x^5y^4$ on jatkuvasti derivoituva eli sen ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= (1+3x^2y^3)^{\frac{1}{2}} + 3x^2y^3(1+3x^2y^3)^{-\frac{1}{2}} + 10x^4y^4 \quad \text{ja} \\ D_2 f(x,y) &= \frac{9}{2}x^3y^2(1+3x^2y^3)^{-\frac{1}{2}} + 8x^5y^3 \end{aligned}$$

ovat jatkuvat. Lisäksi $f(1,1) = 4$ ja

$$D_2 f(1,1) = \frac{41}{4} \neq 0,$$

joten Lauseesta 3.50 seuraa, että pisteen $(1,1)$ riittävän pienessä ympäristössä voidaan yhtälöstä $f(x,y) = 4$ ratkaista muuttuja y muuttujan x funktiona: $y = g(x)$. (Tarkastelemalla funktiota $h(x,y) = f(x,y) - 4$ voidaan tilanne palauttaa Lauseen 3.50 edellyttämään muotoon.) Edelleen, Lauseen 3.50 mukaan pisteen $x = 1$ riittävän pienessä ympäristössä

$$g'(x)\ (= D_1 g(x)) \ = \ -\frac{D_1 f(x, g(x))}{D_2 f(x, g(x))}.$$

Eritysesti,

$$g'(1) \ = \ -\frac{D_1 f(1, g(1))}{D_2 f(1, g(1))} \ = \ -\frac{D_1 f(1,1)}{D_2 f(1,1))} \ = \ -\frac{\frac{27}{2}}{\frac{41}{4}} \ = \ -\frac{54}{41}.$$

Tehtävän 2 ratkaisu. Kun $x = 0$ ja $z = 1$: $e^{2x}y^2z + z\ln y = 1 \Leftrightarrow y^2 + \ln y = 1 \Leftrightarrow y = 1$ ($0 < y < 1 \Rightarrow y^2 < 1$ ja $\ln y < 0$, ja $y > 1 \Rightarrow y^2 > 1$ ja $\ln y > 0$).

Olkoon

$$F(x,y,z) = e^{2x}y^2z + z\ln y - 1.$$

Funktio F on jatkuvasti derivoituva eli sen ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} D_1 F(x,y,z) &= 2e^{2x}y^2z \\ D_2 F(x,y,z) &= 2e^{2x}yz + \frac{z}{y} \quad \text{ja} \\ D_3 F(x,y,z) &= e^{2x}y^2 + \ln y \end{aligned}$$

ovat jatkuvat. Lisäksi $F(0,1,1) = 0$, ja

$$D_2 F(0,1,1) \ = \ 2+1 \ = \ 3 \neq 0,$$

joten Lauseen 3.50 ja Huomautuksen 3.52 perusteella yhtälö $F(x,y,z) = 0$ määrittelee pisteen $(0,1,1)$ riittävän pienessä ympäristössä muuttujan y

muuttujien x ja z funktiona: $y = g(x,z)$. Lauseen 3.50 ja Huomautuksen 3.52 perusteella pätee myös

$$\begin{aligned} D_1g(0,1) &= -\frac{D_1F(0,g(0,1),1)}{D_2F(0,g(0,1),1)} = -\frac{D_1F(0,1,1)}{D_2F(0,1,1)} \\ &= -\frac{2+0}{2+1} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} D_2g(0,1) &= -\frac{D_3F(0,g(0,1),1)}{D_2F(0,g(0,1),1)} = -\frac{D_3F(0,1,1)}{D_2F(0,1,1)} \\ &= -\frac{1+0}{2+1} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Tehtävän 3 ratkaisu. Neliömuotoon

$$\begin{aligned} Q(x,y,z,u) &= -x^2 - z^2 - 2xy + 2y^2 + 10xz + 6xu - 4yu + 6uz + 3u^2 \\ &= -x^2 + 2y^2 - z^2 + 3u^2 - 2xy + 10xz + 6xu + 0yz - 4yu + 6zu \end{aligned}$$

liittyvä symmetrinen matriisi on

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sitä käyttäen neliömuoto $Q(x,y,z,u)$ voidaan esittää seuraavasti

$$\begin{pmatrix} x & y & z & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}.$$

Jos matriisin symmetrisyysvaatimuksesta luovutaan, voidaan A korvata millä tahansa 4×4-matriisilla B, jonka alkioille b_{ij} pätee:

$$\begin{aligned} b_{ii} &= a_{ii} \text{ kaikilla } 1 \leqslant i \leqslant 4 \text{ ja} \\ b_{ij} + b_{ji} &= a_{ij} + a_{ij} \text{ kaikilla } 1 \leqslant i < j \leqslant 4. \end{aligned}$$

Siis voi olla vaikkapa $b_{13} = 10$ ja $b_{31} = 0$, sillä tällöin $b_{13} + b_{31} = 10 = a_{13} + a_{31}$.

Tehtävän 4 ratkaisu. (a). Neliömuotoa $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz$ vastaavan symmetrisen matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

niin sanotut johtavat alideterminantit ovat positiiviset eli

$$d_1 \;=\; 1 > 0, \quad d_2 \;=\; \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \big(-\frac{1}{2}\big) \cdot \big(-\frac{1}{2}\big) \;=\; \frac{3}{4} > 0 \text{ ja}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} - (-\frac{1}{2})\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 1\Big(1 \cdot 1 - \big(-\frac{1}{2}\big) \cdot \big(-\frac{1}{2}\big)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\big(-\frac{1}{2}\big) \cdot 1 - 0 \cdot \big(-\frac{1}{2}\big)\Big)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \;=\; \frac{2}{4} > 0.$$

Siksi tämä neliömuoto on Lauseen 3.57(i) perusteella positiivisesti definiitti.

(b). $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$. Koska neliömuoto Q saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja (esimerkiksi $Q(1,0,0) = 1 > 0$ ja $Q(-1,1,1) = 3 - 2 - 2 = -1 < 0$), se on indefiniitti (Määritelmä 3.56(v)).

(c). Neliömuotoa $Q(x,y,z) = 9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$ vastaava symmetrinen matriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Koska tämän matriisin ns. toiselle johtavalle alideterminantille pätee

$$d_2 = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \not> 0,$$

neliömuoto Q ei ole positiivisesti definiitti (Lause 3.57(i)).

Kun matriisista A jätetään $r \in \{0,1,2\}$ kappaletta rivejä ja samannumeroiset sarakkeet pois, saadaan matriisit joiden determinantit ovat

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det(1) = 1, \;\; \det(4) = 4 \;\text{ ja }\; \det(9) = 9.$$

Koska yksikään näistä determinanteista ei ole negatiivinen, neliömuoto Q on positiivisesti semidefiniitti (Lause 3.57(iii)).

Tehtävän 5 ratkaisu. Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 + z^2$, Hessen matriisi $H(x, y, z)$ on

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Sen johtavat alideterminantit ovat positiiviset kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} d_1(x, y, z) &= 2 > 0, \\ d_2(x, y, z) &= 2 \cdot 2 = 4 > 0 \text{ ja} \\ d_3(x, y, z) &= 2 \cdot 2 \cdot (12z^2 + 2) > 0. \end{aligned}$$

Niinpä Lauseen 3.57 kohdan (i) mukaan

$$H(x, y, z) > 0$$

(eli $H(x, y, z)$ on positiivisesti definiitti) kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Edelleen, Lauseen 4.12 kohdan (ii) perusteella funktio f on vahvasti konveksi määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}^3$.

Tehtävän 6 ratkaisu. Seuraava havainto nähdään suoraan funktion konveksisuuden määritelmästä: jos funktio on konveksi jossain joukossa, se on konveksi myös kyseisen joukon jokaisessa konveksissa osajoukossa. Vastaava pätee myös funktion konkaavisuudelle, vahvalle konveksisuudelle ja vahvalle konkaavisuudelle. Niinpä sen osoittamiseksi, ettei funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x^2 + 10y^2 - z^2$, ole konveksi eikä konkaavi pisteen (x_0, y_0, z_0) konveksissa[1] ympäristössä U, riittää valita pisteen (x_0, y_0, z_0) sisältävät konveksit joukot A_1 ja A_2, joissa ensimmäisessä f on vahvasti konkaavi ja jälkimmäisessä vahvasti konveksi.[2] Tällöin f on vahvasti konkaavi joukossa[3] $U \cap A_1$ ja vahvasti konveksi joukossa $U \cap A_2$ eikä siis voi olla konveksi eikä konkaavi U:ssa.

[1]Funktion konveksisuus ja konkaavisuus määritellään vain konvekseissa joukoissa.

[2]Vakiofunktio on sekä konveksi että konkaavi konveksissa joukossa. Siksi tässä tarkastellaan vahvaa konkaavisuutta ja vahvaa konveksisuutta: vahva konkaavisuus sulkee pois konveksisuuden mahdollisuuden ja vahva koveksisuus sulkee pois konkaavisuuden mahdollisuuden.

[3]Konveksien joukkojen U ja A_1 leikkaus on konveksi: joukon $U \cap A_1$, pisteiden yhdysjanat sisältyvät molempiin joukkoihin U ja A_1 niiden konveksisuuden perusteella, joten ne sisältyvät myös niiden leikkaukseen $U \cap A_1$.

Olkoot

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_0, y_0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \text{ ja} \\ A_2 &= \{(x, y_0, z_0) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Funktion f rajoittuma joukkoon A_1 on $f(x_0, y_0, z) = -z^2 + C_1$, missä vakio C_1 on $2x_0^2 + 10y_0^2$. Tämä on vahvasti konkaavi funktio syksyn kurssin tietojen perusteella: $D_{zz}(-z^2 + C_1) = -2 < 0$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$ ja syksyn kurssin Lause 6.28 (iv). Tietenkin tässä voi käyttää myös lauseita 4.12 (iv) sekä 3.57 (ii) ja (i): funktion $-z^2 + C_1$ Hessen matriisi on 1×1-matriisi (-1).

Vastaavasti, funktion f rajoittuma joukkoon A_2 on $f(x, y_0, z_0) = 2x^2 + C_2$, missä vakio C_2 on $10y_0^2 - z_0^2$. Tämä on vahvasti konveksi funktio syksyn kurssin tietojen perusteella: $D_{xx}(2x^2 + C_2) = 4 > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja syksyn kurssin Lause 6.28 (iii). Tietenkin tässä voi käyttää myös lauseita 4.12 (ii) ja 3.57 (i): funktion $2x^2 + C_2$ Hessen matriisi on 1×1-matriisi (2).