Tehtävän 1 ratkaisu. Funktion $f(x,y) = 4x^2y^3 + x + 2y + \sqrt{1+xy}$ ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 8xy^3 + 1 + \frac{y}{2\sqrt{1+xy}} \quad \text{ja} \\ D_2 f(x,y) &= 12x^2y^2 + 2 + \frac{x}{2\sqrt{1+xy}} \end{aligned}$$

ja sen gradientti on

$$\nabla f(x,y) = \big(D_1 f(x,y), D_2 f(x,y)\big).$$

Lauseen 3.41 mukaan funktion $f(x,y)$ suunnattu derivaatta vektorin $(2,-1)$ suuntaan pisteessä $(0,0)$ on

$$\begin{aligned} D_{(2,-1)} f(0,0) &= \nabla f(0,0) \cdot \frac{(2,-1)}{||(2,-1)||} \\ &= (1,2) \cdot \frac{(2,-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{2-2}{\sqrt{5}} = 0. \end{aligned}$$

Kuten Seurauksessa 3.42 todetaan, Lauseesta 3.41 nähdään, että pisteessä $(0,0)$ funktio f kasvaa nopeimmin gradienttinsa $\nabla f(0,0) = (1,2)$ suuntaan.

Tehtävän 2 ratkaisu. Merkitään $f(x,y,z) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} - 3$, jolloin ellipsoidi

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 3$$

on funktion f tasa-arvopinta $f(x,y,z) = 0$ ja voidaan soveltaa verkkomonisteen sivulla 81 olevaa kaavaa 3.43. Koska

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \Big(\frac{2x}{9}, \frac{y}{2}, \frac{2z}{25}\Big) \quad \text{ja} \\ \nabla f(3,-2,5) &= \Big(\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{5}\Big) \neq (0,0,0), \end{aligned}$$

pisteeseen $(3,-2,5)$ liittyvän tangenttitason yhtälö on

$$\begin{aligned} &\nabla f(3,-2,5) \cdot (x-3, y-(-2), z-5) = 0 \iff \\ &\Big(\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{5}\Big) \cdot (x-3, y+2, z-5) = 0 \iff \\ &\Big(\frac{2}{3}x - 2\Big) + \Big(-y-2\Big) + \Big(\frac{2}{5}z - 2\Big) = 0 \iff \\ &\frac{2}{3}x - y + \frac{2}{5}z = 6. \end{aligned}$$

Tehtävän 3 ratkaisu. Merkitään $f(x,y,z) = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - z - 1$, jolloin pinta

$$z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1 \tag{1}$$

on funktion f tasa-arvopinta $f(x,y,z) = 0$ ja voidaan soveltaa verkkomonisteen sivulla 81 olevaa kaavaa 3.43. Nyt

$$\nabla f(x,y,z) = \big(2x - 4y + 12, -4x - 4y - 12, -1\big).$$

Koska

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0),$$

pisteeseen (x_0, y_0, z_0) liittyvän tangenttitason yhtälö on

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0. \tag{2}$$

Tämä taso on yhdensuuntainen xy-tason kanssa, jos ja vain jos gradientin $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ kaksi ensimmäistä komponenttia ovat nollia:

$$\begin{cases} D_1 f(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ D_2 f(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 4y_0 + 12 = 0 \\ -4x_0 - 4y_0 - 12 = 0 \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$
$$\begin{cases} 2x_0 - 4y_0 + 12 = 0 \\ -6x_0 - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = 1, \end{cases}$$

missä kohdassa $(*)$ alemmasta yhtälöstä on vähennetty ylempi. Kaavasta (1) saadaan edelleen $z_0 = (-4)^2 - 4\cdot(-4)\cdot 1 - 2\cdot 1^2 + 12\cdot(-4) - 12\cdot 1 - 1 = -31$. Siis sivuamispiste on $(-4, 1, -31)$ ja kaavan (2) perusteella kysytty tason yhtälö on

$$\begin{aligned} &\nabla f(-4, 1, -31) \cdot (x - (-4), y - 1, z - (-31)) = 0 \Leftrightarrow \\ &(0, 0, -1) \cdot (x + 4, y - 1, z + 31) = 0 \Leftrightarrow \\ &z = -31. \end{aligned}$$

Tehtävän 4 ratkaisu. Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{1 + x^4 + y^2}$, osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \frac{2x^3}{\sqrt{1 + x^4 + y^2}} \quad \text{ja} \\ D_2 f(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{1 + x^4 + y^2}} \end{aligned}$$

ovat jatkuvat koko $\mathbb{R}^2$:ssa (eli f on jatkuvasti derivoituva $\mathbb{R}^2$:ssa), joten Lauseen 3.39 perusteella f on differentioituva koko $\mathbb{R}^2$:ssa.

Lauseen 3.38 mukaan funktion f kokonaisdifferentiaali pisteessä $(1,1)$ on

$$\begin{aligned}\nabla f(1,1)\cdot(h_1,h_2) &= (D_1f(1,1),D_2f(1,1))\cdot(h_1,h_2)\\ = \big(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\big)\cdot\big(h_1,h_2\big) &= \frac{2h_1}{\sqrt{3}}+\frac{h_2}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Sen osittaisdifferentiaalit samassa pisteessä ovat

$$\begin{aligned}D_1f(1,1)h_1 &= \frac{2h_1}{\sqrt{3}} \text{ ja}\\ D_2f(1,1)h_2 &= \frac{h_2}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Funktion f differentiaalikehitelmästä pisteessä $(1,1)$ saadaan (Lause 3.38)

$$\begin{aligned}&f(0.99,1.01)-f(1,1) = f(1-0.01,1+0.01)-f(1,1)\\ &= \nabla f(1,1)\cdot(-0.01,0.01)+\sqrt{(-0.01)^2+(0.01)^2}\,\varepsilon(-0.01,0.01)\\ &\approx \nabla f(1,1)\cdot(-0.01,0.01) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(-0.01)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0.01 = -\frac{1}{100\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Tarkan arvon $f(0.99,1.01)-f(1,1)$ ja edellä lasketun arvion erotus jaettuna muutosvektorin $(-0.01,0.01)$ pituudella $\sqrt{(-0.01)^2+(0.01)^2}$ on (katso differentiaalikehitelmä, likiarvon voi laskea laskimella)

$$\varepsilon(-0.01,0.01) \approx 0.01357.$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned}&f(0.999,1.001)-f(1,1) = f(1-0.001,1+0.001)-f(1,1)\\ &= \nabla f(1,1)\cdot(-0.001,0.001)+\sqrt{(-0.001)^2+(0.001)^2}\,\varepsilon(-0.001,0.001)\\ &\approx \nabla f(1,1)\cdot(-0.001,0.001) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(-0.001)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0.001\\ &= -\frac{1}{1000\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Tarkan arvon $f(0.999,1.001)-f(1,1)$ ja edellä lasketun arvion erotus jaettuna muutosvektorin $(-0.001,0.001)$ pituudella $\sqrt{(-0.001)^2+(0.001)^2}$ on (katso differentiaalikehitelmä, likiarvon voi laskea laskimella)

$$\varepsilon(-0.001,0.001) \approx 0.001360.$$

Koska f on differentioituva pisteessä $(1,1)$ tiedetäänkin, että

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) \;=\; 0.$$

Tehtävän 5 ratkaisu. Funktion $f(x,y,z,u) = 2x^2+u^2+yz+xyzu$ gradientti on

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x,y,z,u)\\
&= (D_1f(x,y,z,u), D_2f(x,y,z,u), D_3f(x,y,z,u), D_4f(x,y,z,u))\\
&= (4x+yzu, z+xzu, y+xyu, 2u+xyz),
\end{aligned}$$

joten pisteessä $(2,1,-1,1)$ se on

$$\begin{aligned}
&\nabla f(2,1,-1,1)\\
&= (D_1f(2,1,-1,1), D_2f(2,1,-1,1), D_3f(2,1,-1,1), D_4f(2,1,-1,1))\\
&= (8-1,-1-2,1+2,2-2) \;=\; (7,-3,3,0).
\end{aligned}$$

Lauseen 3.38 mukaan funktion $f(x,y,z,u)$ kokonaisdifferentiaali pisteessä $(2,1,-1,1)$ on

$$\begin{aligned}
\nabla f(2,1,-1,1)\cdot(h_1,h_2,h_3,h_4) &= (7,-3,3,0)\cdot(h_1,h_2,h_3,h_4)\\
&= 7h_1-3h_2+3h_3.
\end{aligned}$$

Hessen matriisia varten tarvitaan seuraavia osittaisderivaattoja:

$$\begin{aligned}
D_{11}f(x,y,z,u) &= 4,\\
D_{12}f(x,y,z,u) &= zu,\\
D_{13}f(x,y,z,u) &= yu,\\
D_{14}f(x,y,z,u) &= yz,\\
D_{21}f(x,y,z,u) &= D_{12}f(x,y,z,u),\\
D_{22}f(x,y,z,u) &= 0,\\
D_{23}f(x,y,z,u) &= 1+xu,\\
D_{24}f(x,y,z,u) &= xz,\\
D_{31}f(x,y,z,u) &= D_{13}f(x,y,z,u),\\
D_{32}f(x,y,z,u) &= D_{23}f(x,y,z,u),\\
D_{33}f(x,y,z,u) &= 0,\\
D_{34}f(x,y,z,u) &= xy,\\
D_{41}f(x,y,z,u) &= D_{14}f(x,y,z,u),\\
D_{42}f(x,y,z,u) &= D_{24}f(x,y,z,u),\\
D_{43}f(x,y,z,u) &= D_{34}f(x,y,z,u) \text{ ja}\\
D_{44}f(x,y,z,u) &= 2.
\end{aligned}$$

Funktion f Hessen matriisi pisteessä $(2,1,-1,1)$ on

$$H(2,1,-1,1) =$$
$$\begin{bmatrix} D_{11}f(2,1,-1,1) & D_{12}f(2,1,-1,1) & D_{13}f(2,1,-1,1) & D_{14}f(2,1,-1,1) \\ D_{21}f(2,1,-1,1) & D_{22}f(2,1,-1,1) & D_{23}f(2,1,-1,1) & D_{24}f(2,1,-1,1) \\ D_{31}f(2,1,-1,1) & D_{32}f(2,1,-1,1) & D_{33}f(2,1,-1,1) & D_{34}f(2,1,-1,1) \\ D_{41}f(2,1,-1,1) & D_{42}f(2,1,-1,1) & D_{43}f(2,1,-1,1) & D_{44}f(2,1,-1,1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tehtävän 6 ratkaisu. Funktiolle $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, pätee

$$\begin{aligned} &D_{11}f(x,y,z) \;=\; D_1(D_1f(x,y,z)) \;=\; D_x\big(-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\big) \\ &=\; -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Symmetrian perusteella saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned} D_{22}f(x,y,z) &= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \text{ ja} \\ D_{33}f(x,y,z) &= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Niinpä

$$\begin{aligned} &D_{11}f(x,y,z) + D_{22}f(x,y,z) + D_{33}f(x,y,z) \\ &= -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + (3x^2+3y^2+3z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ &= -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ &= -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \;=\; 0 \end{aligned}$$

kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ eli f on harmooninen (määrittelyjoukossaan).