Tehtävän 1 ratkaisu. Funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2$, on osoitettava määritelmän avulla jatkuvaksi pisteessä $(1, 1, 0)$. Olkoon $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} |f(x,y,z) - f(1,1,0)| \;&=\; |x^2 - 1| \;=\; |(x+1)(x-1)| \\ &=\; |x+1||x-1| < 3|x-1|, \end{aligned}$$

kun $0 < x < 2$ eli $|x - 1| < 1$. Jos lisäksi $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$, nähdään tästä edelleen, että

$$|f(x,y,z) - f(1,1,0)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \tag{1}$$

Olkoon $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{3})\,(> 0)$. Koska

$$|x-1| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} \;=\; ||(x,y,z) - (1,1,0)||,$$

pätee (1) kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (f:n määrittelyjoukko on $\mathbb{R}^3$), joilla

$$||(x,y,z) - (1,1,0)|| < \delta.$$

Siis funktio f on jatkuva pisteessä $(1, 1, 0)$ Määritelmän (toisen muotoilun) perusteella.

Tehtävän 2 ratkaisu. Huomaa, että lauseke

$$\frac{x^3y^3 + x^7}{x^6 + 2y^6}$$

on määritelty, kun $(x, y) \neq (0, 0)$. Olkoot

$$\begin{aligned} A &= \{(0,y) \mid y \neq 0\} \text{ ja} \\ B &= \{(x,x) \mid x \neq 0\}. \end{aligned}$$

Tällöin tarkasteltava lauseke on määritelty joukossa A ja sitä pitkin voidaan lähestyä pistettä $(0, 0)$. (Tämä tarkoittaa sitä, että joukosta $A\setminus\{(0, 0)\}$ $(= A)$ löytyy pisteitä, jotka ovat vaikka kuinka lähellä pistettä (0,0) eli piste $(0, 0)$ on joukon A kasautumispiste (kasaantumispiste)). Vastaavat havainnot pätevät myös joukolle B. Siksi alla vasemmalla olevat kaksi raja-arvoa on määritelty ja

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ (x,y)\in A}} \frac{x^3y^3 + x^7}{x^6 + 2y^6} \;=\; \lim_{y\to 0} \frac{0}{2y^6} \;=\; 0 \text{ sekä} \\ &\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ (x,y)\in B}} \frac{x^3y^3 + x^7}{x^6 + 2y^6} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{x^6 + x^7}{3x^6} = \lim_{x\to 0} (\frac{1}{3} + \frac{x}{3}) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Koska nämä raja-arvot ovat erisuuret, raja-arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3 + x^7}{x^6 + 2y^6}$$

ei ole olemassa (Seuraus 3.11).

Tehtävän 3 ratkaisu. Huomataan aluksi, että lähestyttäessä pistettä $(0,0)$ esimerkiksi pitkin joukkoa $\{(0,y) \mid y \neq 0\}$ vastaava raja-arvo on nolla. Siis, jos tehtävän raja-arvo on olemassa, se on nolla (Lause 3.9).

Käytetään ohjeen mukaisesti napakoordinaatteja:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Tällöin saadaan (huomaa, että $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$)

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{x^4 + xy^2}{x^2 + 2y^2} - 0\Big| &= \frac{|x^4 + xy^2|}{(x^2 + y^2) + y^2} = \frac{|r^4\cos^4\varphi + r^3\cos\varphi\sin^2\varphi|}{r^2 + r^2\sin^2\varphi} \\
&\leqslant \frac{r^4\cos^4\varphi + r^3|\cos\varphi|\sin^2\varphi}{r^2 + r^2\sin^2\varphi} = r\frac{r\cos^4\varphi + |\cos\varphi|\sin^2\varphi}{1 + \sin^2\varphi} \\
&\leqslant r\frac{r+1}{1+0} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

sillä $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$, kun $(x,y) \to (0,0)$. Siis

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + xy^2}{x^2 + 2y^2} = 0.$$

Tämän raja-arvon voi laskea napakoordinaatteja käyttämättä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{x^4 + xy^2}{x^2 + 2y^2} - 0\Big| &\leqslant \frac{x^4 + |x|y^2}{x^2 + 2y^2} \leqslant \frac{x^2(x^2 + 2y^2) + |x|(x^2 + 2y^2)}{x^2 + 2y^2} \\
&= x^2 + |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Tehtävän 4 ratkaisu. Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = (xy + |x|, \ln(1 + x^2), \sqrt{x^2 + y^2 + 1}),$$

komponenttifunktiot ovat

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f_1(x,y) = xy + |x|, \\ f_2 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f_2(x,y) = \ln(1+x^2), \ \text{ ja} \\ f_3 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f_3(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}. \end{aligned}$$

Osoitetaan f:n komponenttifunktiot jatkuviksi, jolloin myös f on jatkuva (katso verkkomonisteen sivun 72 vaihtoehtoinen muotoilu vektoriarvoisen funktion jatkuvuuden määritelmälle).

Polynomit $p_1(x,y) = xy$, $p_2(x,y) = x$, $p_3(x,y) = 1 + x^2$ ja $p_4(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan $\mathbb{R}^2$. Syksyn kurssin perusteella itseisarvo, luonnollinen logaritmi, ja neliöjuuri ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan. Koska f:n komponenttifunktiot saadaan yhdistämällä ja yhteen laskemalla näistä jatkuvista funktioista, ne ovat jatkuvia (Lause 3.21 ja Seuraus 3.16).

Tehtävän 5 ratkaisu. Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{xyz^2 + y + z^3}{x+y+z}$$

(laajin mahdollinen, kuten tällä kurssilla aina, ellei toisin mainita,) määrittelyjoukko

$$A = \{(x,y,z) \mid x+y+z \neq 0\}.$$

Olkoot

$$\begin{aligned} B &= \{(0,-1+t,1) \mid t \neq 0\} \ \text{ ja} \\ C &= \{(0,-1,1+t) \mid t \neq 0\}. \end{aligned}$$

Tällöin $B \subset A$ ja joukkoa B pitkin voidaan lähestyä pistettä $(0,-1,1)$. (Tämä tarkoittaa sitä, että joukosta $B \setminus \{(0,-1,1)\}$ $(= B)$ löytyy pisteitä, jotka ovat vaikka kuinka lähellä pistettä $(0,-1,1)$ eli piste $(0,-1,1)$ on joukon B kasautumispiste). Vastaavasti $C \subset A$ ja joukkoa C pitkin voidaan lähestyä pistettä $(0,-1,1)$. Siksi alla vasemmalla olevat kaksi raja-arvoa on määritelty ja

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,-1,1), \\ (x,y,z)\in B}} \frac{xyz^2+y+z^3}{x+y+z} &= \lim_{t\to 0} \frac{0+(-1+t)+1}{0+(-1+t)+1} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{t} = 1 \ \text{ ja} \\ \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,-1,1), \\ (x,y,z)\in C}} \frac{xyz^2+y+z^3}{x+y+z} &= \lim_{t\to 0} \frac{0-1+(1+t)^3}{0-1+(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{3t+3t^2+t^3}{t} = 3 \end{aligned}$$

Koska nämä raja-arvot ovat erisuuret, raja-arvoa

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,-1,1),\\ (x,y,z)\in A}} \frac{xyz^2+y+z^3}{x+y+z}$$

ei ole olemassa (Seuraus 3.11).

Tehtävän 6 ratkaisu.

$$f(x,y,z) = \frac{xyz^2+y+z^3}{x+y+z},$$

joten

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y,z) &= \frac{yz^2(x+y+z)-(xyz^2+y+z^3)}{(x+y+z)^2}, \\ D_2 f(x,y,z) &= \frac{(xz^2+1)(x+y+z)-(xyz^2+y+z^3)}{(x+y+z)^2} \text{ ja} \\ D_3 f(x,y,z) &= \frac{(2xyz+3z^2)(x+y+z)-(xyz^2+y+z^3)}{(x+y+z)^2}. \end{aligned}$$

Siis pisteessä $(-1,2,1)$ funktion f gradientti on

$$\begin{aligned} \nabla f(-1,2,1) &= (D_1 f(-1,2,1), D_2 f(-1,2,1), D_3(-1,2,1)) \\ &= \Big(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\Big). \end{aligned}$$