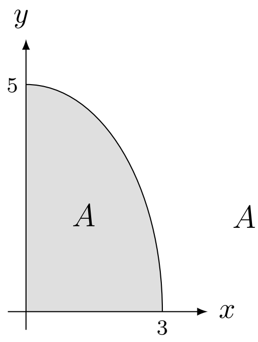
Tehtävän 1 ratkaisu.



$$A = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y \text{ ja } \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} \leqslant 1\right\}$$

Joukko A on neljännes ellipsistä (sisuksineen), joten sen keskiön laskemiseksi kannattaa tehdä vihjeessä annettu muunnos (vrt. napakoordinaattimuunnos):

$$\begin{cases} x(r, \psi) = 3r\cos\psi \text{ ja} \\ y(r, \psi) = 5r\sin\psi. \end{cases}$$

Joukossa A: $0 \leqslant r \leqslant 1$ ja $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Tämän muunnoksen Jacobin determinantti on

$$J(r, \psi) = \begin{vmatrix} D_r x(r, \psi) & D_\psi x(r, \psi) \\ D_r y(r, \psi) & D_\psi y(r, \psi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cos\psi & -3r\sin\psi \\ 5\sin\psi & 5r\cos\psi \end{vmatrix}$$
$$= 15r\cos^2\psi + 15r\sin^2\psi = 15r(\cos^2\psi + \sin^2\psi) = 15r.$$

Nyt joukon A pinta-ala $a(A)$ voidaan laskea seuraavasti:

$$\iint\limits_A dxdy = \iint\limits_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} |J(r, \psi)|\, drd\psi = \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\, 15r$$
$$= \int_0^1 \frac{15\pi}{2} r\, dr = \Big/_0^1 \frac{15\pi}{4} r^2 = \frac{15\pi}{4}.$$

Lisäksi

$$\iint\limits_A x\, dxdy = \iint\limits_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} 3r\cos\psi\, |J(r, \psi)|\, drd\psi$$
$$= \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\, 45r^2\cos\psi = \int_0^1 dr \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} 45r^2\sin\psi$$
$$= \int_0^1 45r^2\, dr = \Big/_0^1 \frac{45r^3}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

ja

$$\iint_A y\,dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} 5r\sin\psi\,|J(r,\psi)|\,drd\psi$$
$$= \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\, 75r^2\sin\psi = \int_0^1 dr \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} 75r^2(-\cos\psi)$$
$$= \int_0^1 75r^2\,dr = \Big/_0^1 \frac{75r^3}{3} = \frac{75}{3} = 25,$$

joten joukon A keskiö on

$$\frac{1}{a(A)}\Big(\iint_A x\,dydy, \iint_A y\,dxdy\Big) = \frac{4}{15\pi}\Big(15, 25\Big) = \Big(\frac{4}{\pi}, \frac{20}{3\pi}\Big).$$

Tehtävän 2 ratkaisu. Kuution $[1,2]^3 = [1,2]\times[1,2]\times[1,2] = \{(x,y,z) \mid 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2 \text{ ja } 1 \leqslant z \leqslant 2\}$ yli integroitaessa voidaan muuttujien x, y ja z integrointijärjestys valita vapaasti sen vaikuttamatta integrointirajoihin.

$$\iiint_{[1,2]^3} f(x,y,x)\,dxdydz = \int_1^2 dx \int_1^2 dy \int_1^2 dz\,(x^5y^2z^3 + xyz)$$
$$= \int_1^2 dx \int_1^2 dy \Big/_1^2 \Big(\frac{1}{4}x^5y^2z^4 + \frac{1}{2}xyz^2\Big)$$
$$= \int_1^2 dx \int_1^2 dy \Big(\frac{16}{4}x^5y^2 + \frac{4}{2}xy - \frac{1}{4}x^5y^2 - \frac{1}{2}xy\Big)$$
$$= \int_1^2 dx \int_1^2 dy \Big(\frac{15}{4}x^5y^2 + \frac{3}{2}xy\Big)$$
$$= \int_1^2 dx \Big/_1^2 \Big(\frac{5}{4}x^5y^3 + \frac{3}{4}xy^2\Big)$$
$$= \int_1^2 \Big(\frac{40}{4}x^5 + \frac{12}{4}x - \frac{5}{4}x^5 - \frac{3}{4}x\Big)dx$$
$$= \int_1^2 \Big(\frac{35}{4}x^5 + \frac{9}{4}x\Big)dx$$
$$= \Big/_1^2 \Big(\frac{35}{24}x^6 + \frac{9}{8}x^2\Big)$$
$$= \frac{280}{3} + \frac{9}{2} - \frac{35}{24} - \frac{9}{8} = \frac{381}{4} = 95,25.$$

Tehtävän 3 ratkaisu. Joukko $V = \{(x,y,z) : |x| + y^2 \leqslant 1 \text{ ja } -1 \leqslant z \leqslant 2\}$ on xy-projisoituva, sillä se voidaan esittää seuraavasti

$$V \;=\; \big\{(x,y,z) : (x,y) \in A \text{ ja } -1 \leqslant z \leqslant 2\big\},$$

missä (huomaa: $|x| + y^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow |x| \leqslant 1 - y^2 \Leftrightarrow -1 + y^2 \leqslant x \leqslant 1 - y^2$)

$$A \;=\; \big\{(x,y) : -1 \leqslant y \leqslant 1 \text{ ja } -1 + y^2 \leqslant x \leqslant 1 - y^2\big\}.$$

Lisäksi havaitaan, että A on y-projisoituva. Edellä olleet projisoituvuudet nähdään myös, kun joukko V esitetään kuten alla:

$$V \;=\; \big\{(x,y,z) : -1 \leqslant y \leqslant 1,\; -1 + y^2 \leqslant x \leqslant 1 - y^2 \text{ ja } -1 \leqslant z \leqslant 2\big\},$$

missä y:n rajojen täytyy olla vakiot, x:n rajat saavat riippua y:stä ja z:n rajat saavat riippua x:stä ja y:stä. Niinpä verkkomonisteen sivujen 54-55 mukaan voidaan laskea seuraavasti

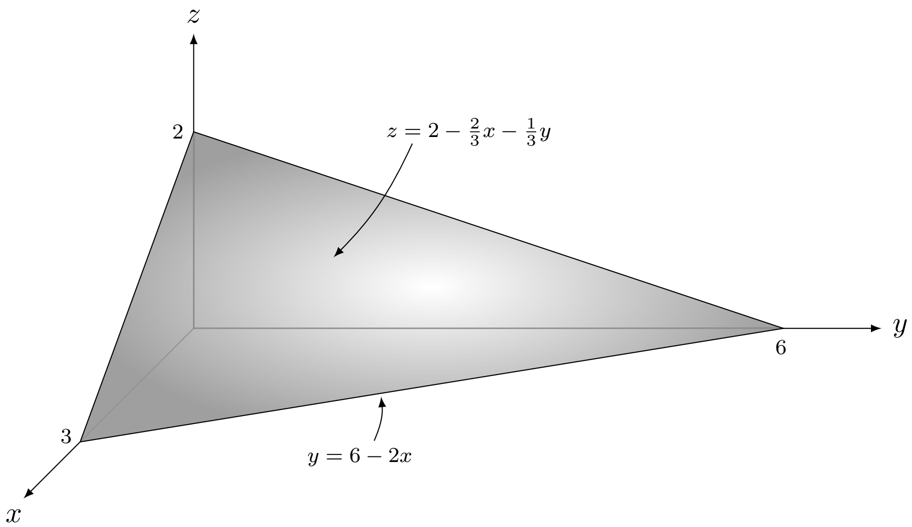
$$\begin{aligned}
\int_V f \; &\Bigg(= \iint_A \Big(\int_{-1}^{2} f(x,y,z)\,dz \Big) dxdy \Bigg) \\
&= \int_{-1}^{1} dy \int_{-1+y^2}^{1-y^2} dx \int_{-1}^{2} dz\, (x^2 + yz^2) \\
&= \int_{-1}^{1} dy \int_{-1+y^2}^{1-y^2} dx \Big/_{-1}^{2} \big(x^2 z + \frac{yz^3}{3}\big) \\
&= \int_{-1}^{1} dy \int_{-1+y^2}^{1-y^2} dx\, \big(3x^2 + 3y\big) \\
&= \int_{-1}^{1} dy \Big/_{-1+y^2}^{1-y^2} \big(x^3 + 3yx\big) \\
&= \int_{-1}^{1} \big(2(1-y^2)^3 + 6y(1-y^2)\big)\,dy \\
&= \int_{-1}^{1} \big(2 - 6y^2 + 6y^4 - 2y^6 + 6y - 6y^3\big)\,dy \\
&= \Big/_{-1}^{1} \big(2y - 2y^3 + \frac{6y^5}{5} - \frac{2y^7}{7} + 3y^2 - \frac{3y^4}{2}\big) \\
&= 4 - 4 + \frac{12}{5} - \frac{4}{7} \;=\; \frac{64}{35}\; (\approx 1,83).
\end{aligned}$$

Koska joukon V viimeisessä esityksessä sekä y:n että z:n rajat ovat vakioita ja x:n rajat riippuvat vain y:stä, voidaan näitä integrointirajoja käyttää kunhan x integroidaan ennen y:tä. Siis

$$\begin{aligned}\int_V f &= \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{2} dz \int_{-1+y^2}^{1-y^2} dx\,(x^2+yz^2)\\ &= \int_{-1}^{2} dz \int_{-1}^{1} dy \int_{-1+y^2}^{1-y^2} dx\,(x^2+yz^2).\end{aligned}$$

Tehtävän 4 ratkaisu (ratkaisutapa I).

$$V = \big\{(x,y,z) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \text{ ja } 2x+y+3z \leqslant 6\big\}.$$



Kirjoitetaan joukko V muotoon, josta se nähdään xy-projisoituvaksi:

$$V = \Big\{(x,y,z) \mid (x,y) \in A \text{ ja } 0 \leqslant z \leqslant 2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\Big\},$$

missä

$$A = \big\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3 \text{ ja } 0 \leqslant y \leqslant 6-2x\big\}.$$

Lisäksi A on x-projisoituva. Edellä olleet projisoituvuudet nähdään myös, kun joukko V esitetään seuraavasti:

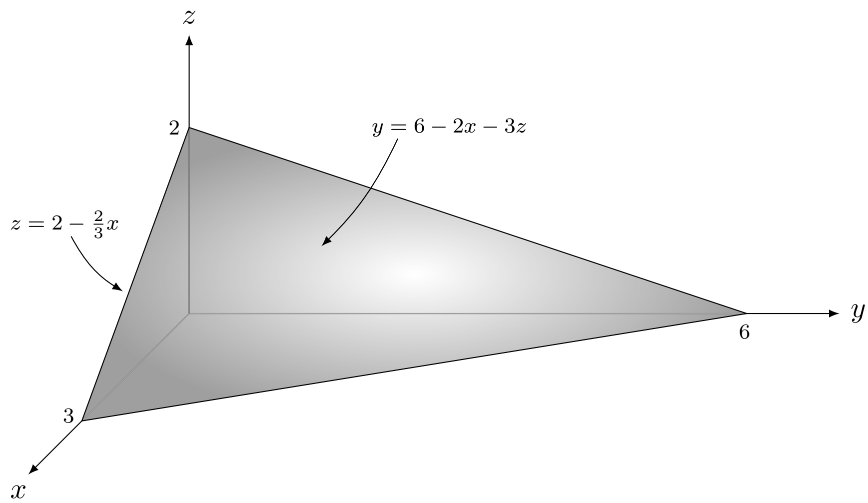
$$V = \Big\{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 6-2x \text{ ja } 0 \leqslant z \leqslant 2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\Big\},$$

missä x:n rajojen täytyy olla vakiot, y:n rajat saavat riippua x:stä ja z:n rajat saavat riippua x:stä ja y:stä. Niinpä verkkomonisteen sivujen 54-55 mukaan voidaan laskea seuraavasti

$$
\begin{aligned}
\int_V 1 &= \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} dy \int_0^{2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y} dz \\
&= \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} dy \Big(2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\Big) \\
&= \int_0^3 dx \Big/_0^{6-2x} \Big(2y - \frac{2}{3}xy - \frac{1}{6}y^2\Big) \\
&= \int_0^3 \Big(12 - 4x - 4x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{6}(6-2x)^2\Big)dx \\
&= \Big/_0^3 \Big(12x - 4x^2 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{6}(6-2x)^3\Big) \\
&= 36 - 36 + 12 + 0 - 6 \;=\; 6.
\end{aligned}
$$

Tehtävän 4 ratkaisu (ratkaisutapa II). Tämän tehtävän ratkaisussa on kolmiulotteisen tapauksen maksimaaliset $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ tapaa valita projektiosuunnat tarvitsematta jakaa joukkoa V pienempiin osiin. Valitaan ne harjoituksen vuoksi vielä toisella tavalla.

$$V \;=\; \big\{(x,y,z) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \text{ ja } 2x + y + 3z \leqslant 6\big\}.$$



Kirjoitetaan joukko V muotoon, josta se nähdään xz-projisoituvaksi:

$$V \;=\; \big\{(x,y,z) \mid (x,z) \in A \text{ ja } 0 \leqslant y \leqslant 6 - 2x - 3z\big\},$$

missä

$$A \;=\; \big\{(x,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3 \text{ ja } 0 \leqslant z \leqslant 2 - \frac{2}{3}x\big\}.$$

Lisäksi A on x-projisoituva. Edellä olleet projisoituvuudet nähdään myös, kun joukko V esitetään seuraavasti:

$$V = \big\{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant z \leqslant 2 - \frac{2}{3}x \ \text{ ja } \ 0 \leqslant y \leqslant 6 - 2x - 3z\big\},$$

missä x:n rajojen täytyy olla vakiot, z:n rajat saavat riippua x:stä ja y:n rajat saavat riippua x:stä ja z:stä. Niinpä verkkomonisteen sivujen 54-55 mukaan voidaan laskea seuraavasti

$$\begin{aligned}
\int_V 1 &= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} dz \int_0^{6-2x-3z} dy \\
&= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} dz\,(6-2x-3z) \\
&= \int_0^3 dx \Big/_0^{2-\frac{2}{3}x} (6z - 2xz - \frac{3}{2}z^2) \\
&= \int_0^3 \Big(12 - 4x - 4x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{2}\big(2 - \frac{2}{3}x\big)^2\Big) dx \\
&= \Big/_0^3 \Big(12x - 4x^2 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{3}\cdot(-\frac{3}{2})\cdot\frac{3}{2}\big(2 - \frac{2}{3}x\big)^3\Big) \\
&= 36 - 36 + 12 + 0 - 6 \;=\; 6.
\end{aligned}$$

Tehtävän 5 ratkaisu. Käytetään integraaleissa mukavan tuntuisia projektiosuuntia. (Kaikki mahdollisuudet ovat käytettävissä tarvitsematta pilkkoa joukkoa V pienempiin osiin.)

$$V = \Big\{(x,y,z) \mid 0 \leqslant z \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 6 - 3z \ \text{ ja } \ 0 \leqslant x \leqslant 3 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z\Big\},$$

joten

$$\begin{aligned}
\iiint_V x\,dxdydz &= \int_0^2 dz \int_0^{6-3z} dy \int_0^{3-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z} dx\,x \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{6-3z} dy \Big/_0^{3-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z} \frac{x^2}{2} \\
&= \int_0^2 dz \int_0^{6-3z} dy\, \frac{\big(3 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z\big)^2}{2} \\
&= \int_0^2 dz \Big/_0^{6-3z} -\frac{\big(3 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z\big)^3}{3} \\
&= \int_0^2 \Big(0 + \frac{\big(3 - \frac{3}{2}z\big)^3}{3}\Big) dz \;=\; \Big/_0^2 -\frac{2}{3}\cdot\frac{\big(3 - \frac{3}{2}z\big)^4}{12} \;=\; \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Kuten edellisen tehtävän jälkimmäisessä ratkaisutavassa

$$V = \Big\{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant z \leqslant 2 - \frac{2}{3}x \text{ ja } 0 \leqslant y \leqslant 6 - 2x - 3z\Big\},$$

joten

$$\begin{aligned}
\iiint_V y\,dxdydz &= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} dz \int_0^{6-2x-3z} dy\, y \\
&= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} dz \Big/_0^{6-2x-3z} \frac{y^2}{2} \\
&= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} dz\, \frac{\big(6-2x-3z\big)^2}{2} \\
&= \int_0^3 dx \Big/_0^{2-\frac{2}{3}x} - \frac{\big(6-2x-3z\big)^3}{18} \\
&= \int_0^3 \Big(0 + \frac{\big(6-2x\big)^3}{18}\Big)\, dx = \Big/_0^3 - \frac{\big(6-2x\big)^4}{144} = 9.
\end{aligned}$$

Kuten edellisen tehtävän ensimmäisessä ratkaisutavassa

$$V = \Big\{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 6 - 2x \text{ ja } 0 \leqslant z \leqslant 2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\Big\},$$

joten

$$\begin{aligned}
\iiint_V y\,dxdydz &= \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} dy \int_0^{2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y} dz\, z \\
&= \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} dy \Big/_0^{2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y} \frac{z^2}{2} \\
&= \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} dy\, \frac{\big(2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y\big)^2}{2} \\
&= \int_0^3 dx \Big/_0^{6-2x} - \frac{\big(2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y\big)^3}{2} \\
&= \int_0^3 \Big(0 + \frac{\big(2-\frac{2}{3}x\big)^3}{2}\Big)\, dx = \Big/_0^3 - \frac{3\big(2-\frac{2}{3}x\big)^4}{16} = 3.
\end{aligned}$$

Edellisessä tehtävässä laskettiin joukon V tilavuus: $\int_V 1 = 6$. Niinpä sen keskiö on

$$\frac{1}{\int_V 1}\Big(\int_V x, \int_V y, \int_V z\Big) = \frac{1}{6}\Big(\frac{9}{2}, 9, 3\Big) = \Big(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\Big).$$

Tetraedrin keskiö saadaan myös laskemalla kärkipisteiden koordinaattien keski-arvo:

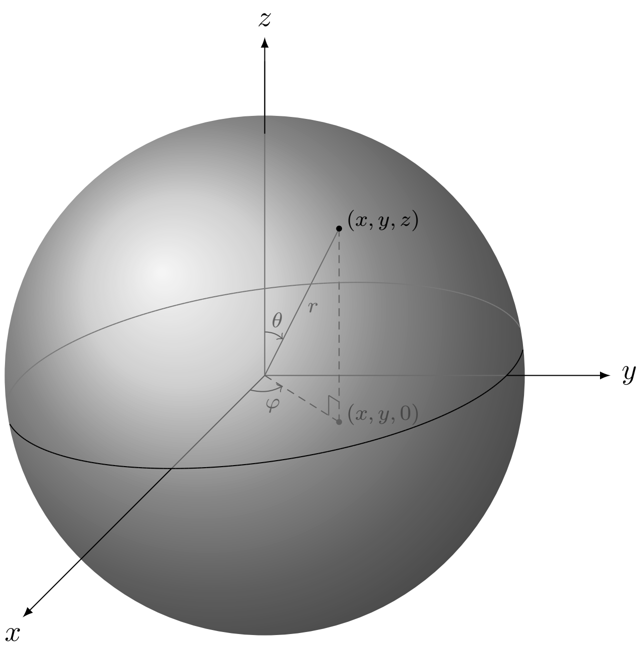
$$\frac{(0,0,0)+(3,0,0)+(0,6,0)+(0,0,2)}{4} = \left(\frac{3}{4},\frac{6}{4},\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Tehtävän 6 ratkaisu. Ei ole aivan selvää mitä pohjoisen leveyspiirin 30° eteläpuolella tarkoittaa kuulan sisällä. Siksi tässä ratkaisussa on kaksi vaihtoehtoista tapaa ymmärtää tehtävä. Molemmissa käytetään pallokoordinaatistoa.

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ piste (x,y,z) saadaan pallokoordinaateista (r,θ,φ), missä $r\in[0,\infty[$, $\theta\in[0,\pi]$ ja $\varphi\in[0,2\pi]$ (katso Kuva 1), seuraavasti

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Tämän muunnoksen Jacobin determinantti $J(r,\theta,\varphi)$ on $r^2\sin\theta$ (katso verkkomonisteen sivu 58).



Kuva 1. Pallokoordinaatistossa r on pisteiden $(0,0,0)$ ja (x,y,z) välinen etäisyys $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, θ on positiivisen z-akselin ja pisteen (x,y,z) paikkavektorin välinen kulma ja φ on positiivisen x-akselin ja pisteen $(x,y,0)$ paikkavektorin välinen kulma (vrt. napakoordinaatiston kulma φ).

Huomaa, että maantieteellinen pohjoinen leveyspiiri on pohjoisnavalla 90° ja päiväntasaajalla 0°. Pallokoordinaatistossa (r, θ, φ) kulman θ vastaavat luvut ovat 0 ja $\frac{\pi}{2}$ radiaaneissa. Erityisesti pohjoisella leveyspiirillä 30°, joka on radiaaneissa $\frac{\pi}{6}$, pallokoordinaatiston kulma θ on $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Vaihtoehto 1. Tässä vaihtoehdossa ymmärretään tehtävässä mainitulla eteläosalla tarkoitettavan sitä kuulan osaa, jossa $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \pi$. Merkitään sitä symbolilla K_{30}. Pallokoordinaatistoon siirtymällä saadaan sen tilavuus laskettua seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\iiint_{K_{30}} dxdydz &= \int_0^R dr \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \underbrace{|J(r,\theta,\varphi)|}_{=r^2 \sin\theta} \\
&= 2\pi \int_0^R dr \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} d\theta \, r^2 \sin\theta \\
&= 2\pi \int_0^R dr \Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} r^2(-\cos\theta) \\
&= 2\pi \int_0^R r^2(1+\frac{1}{2})dr \\
&= 2\pi \Big/_0^R \frac{r^3}{3} \cdot \frac{3}{2} = \pi R^3.
\end{aligned}
$$

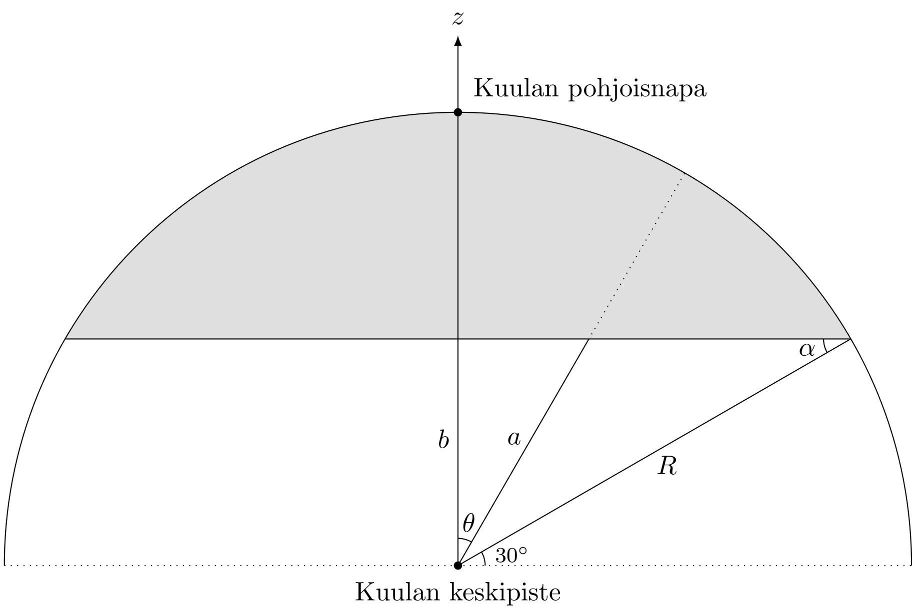
Siis eteläosan osuus tilavuudesta on

$$
\frac{\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}
$$

eli 75 %.

Vaihtoehto 2. Taso T leikkaa R-säteisen kuulan kahteen osaan pohjoista leveyspiiriä 30° myöden. Tässä vaihtoehdossa kannattaisi käyttää apuna pyörähdyskappaletta tai hyödyntää vaihtoehdon 1 ratkaisua ja sopivasti valittua kartiota (katso ratkaisun loppu), mutta nyt kuitenkin harjoitellaan pallokoordinaatiston käyttöä.

Lasketaan aluksi yläosan tilavuus. Vähentämällä se koko kuulan tilavuudesta saadaan alaosan tilavuus. Näin menetellään sen vuoksi, ettei tulevaa integraalia tarvitsisi integrointirajojen takia laskea kahdessa palassa. Tilavuuden laskemisessa tarvittava integrointi kannattaa tehdä pallokoordinaatistossa. Tällöin täytyy integrointirajojen takia tuntea (Kuvan 2 merkintöjä käyttäen) etäisyys a kulman θ funktiona.



Kuva 2. Kuvassa on kuulan keskipisteen ja pohjoisnavan kautta kulkeva tasoa T vastaan kohtisuora poikkileikkaus kuulan puolikkaasta. Kulma θ on kuten pallokoordinaatistossa. Tason T kuulasta erottama yläosa on varjostettu.

Kuvan 2 merkintöjä käyttäen pätee ($30°$ on radiaaneissa $\frac{\pi}{6}$):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{6}, \\ b &= R\sin\alpha = \frac{R}{2} \text{ ja} \\ a &= \frac{b}{\cos\theta} = \frac{R}{2\cos\theta}. \end{aligned}$$

Siis kuulan yläosa K_Y on pallokoordinaatistossa ilmaistuna

$$K_Y^* = \left\{ (r,\theta,\varphi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3},\ \frac{R}{2\cos\theta} \leqslant r \leqslant R \text{ ja } 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \right\}$$

ja sen tilavuus voidaan laskea pallokoordinaatistoon siirtymällä seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\iiint_{K_Y} dxdydz &= \iiint_{K_Y^*} |J(r,\theta,\varphi)|drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{R}{2\cos\theta}}^{R} dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2 \sin\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{R}{2\cos\theta}}^{R} dr\, r^2 \sin\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \Big/_{\frac{R}{2\cos\theta}}^{R} \frac{r^3}{3} \sin\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \Big(\sin\theta - \frac{\sin\theta}{8\cos^3\theta}\Big)\frac{R^3}{3}\, d\theta \\
&= 2\pi \Big/_0^{\frac{\pi}{3}} \Big(-\cos\theta - \frac{1}{16\cos^2\theta}\Big)\frac{R^3}{3} \\
&= 2\pi\Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{16}\Big)\frac{R^3}{3} = \frac{5}{24}\pi R^3.
\end{aligned}
$$

Siis alaosan osuus tilavuudesta on

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{5}{24}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32} = 0,84375$$

eli noin 84 %.

Alaosan tilavuuden voi laskea myös lisäämällä vaihtoehdossa 1 laskettuun tilavuuteen puuttuvan kartion, jonka pohjan pinta-ala on (Kuvan 2 merkintöjä käyttäen) $A = \pi(R\cos\alpha)^2$ ja korkeus on $b = R\sin\alpha$, osuus $\frac{1}{3}Ab$.

Pyörähdyskappaleen avulla yläosan tilavuuden voi laskea seuraavalla tavalla (alaosan tilavuudenkin saisi suoraan vastaavalla tavalla). Kun käyrä $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [\frac{R}{2}, R]$, pyörähtää x-akselin ympäri, on syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus

$$\pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} \big(R^2 - x^2\big)dx = \pi \Big/_{\frac{R}{2}}^{R} \big(R^2 x - \frac{1}{3}x^3\big) = \frac{5}{24}\pi R^3.$$