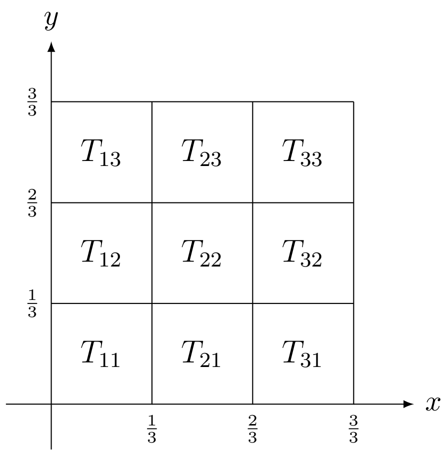
Tehtävän 1 ratkaisu. Olkoon D neliön $T = [0,1] \times [0,1]$ jako n^2 kappaleeseen samankokoisia osaneliöitä T_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$ ja $1 \leqslant j \leqslant n$. Siis jako D jakaa neliön T osaneliöihin (osasuorakulmioihin)

$$T_{ij} = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}], \quad 1 \leqslant i \leqslant n \text{ ja } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Kunkin osaneliön pinta-ala a_{ij} on $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$.



Kuva 1. Esimerkki jaosta D tapauksessa $n = 3$.

Funktio $f(x,y) = 2x + y$ kasvaa x:n kasvaessa. Samoin se kasvaa y:n kasvaessa. Siksi funktio f saavuttaa kussakin osaneliössä suurimman ja pienimmän arvon niiden ”koillis-”ja ”lounaiskolkissa”, joten

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in T_{ij}\} = f(\tfrac{i}{n}, \tfrac{j}{n}) = \tfrac{2i}{n} + \tfrac{j}{n}, \\
m_{ij} &= \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in T_{ij}\} = f(\tfrac{i-i}{n}, \tfrac{j-1}{n}) = \tfrac{2i-2}{n} + \tfrac{j-1}{n}, \\
M_{ij} - m_{ij} &= \tfrac{2}{n} + \tfrac{1}{n} = \tfrac{3}{n}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
S_D - s_D &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_{ij} - m_{ij}) a_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{n^3} = \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n^3} \cdot n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n^2} = \frac{3}{n^2} \cdot n = \frac{3}{n} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

kun $n > \frac{3}{\varepsilon}$. Lauseesta 2.2 nähdään nyt, että f on integroituva yli T:n eli $\int_T f$ on olemassa.

Yläsummaksi saadaan[1]

$$\begin{aligned} S_D &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{2i}{n}+\frac{j}{n}\Big)\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(2i+j) \\ &= \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i\cdot n + \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+n}{2}\cdot n \\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n\cdot n = \frac{2}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n + \frac{1+n}{2n} \\ &= \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Koska f osoitettiin edellä integroituvaksi yli T:n, tämä raja-arvo on kyseisen integraalin arvo eli

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \frac{3}{2}.$$

Tehtävän 2 ratkaisu. Edellisen tehtävän integraali laskettuna iteroituna integraalina (Lause 2.9 ja Huomautus 2.10(ii)):

$$\begin{aligned} \iint_T f(x,y)dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy\,(2x+y) = \int_0^1 dx \Big/_0^1 (2xy + \frac{y^2}{2}) \\ &= \int_0^1 (2x+\frac{1}{2})dx = \Big/_0^1 (x^2 + \frac{x}{2}) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Iteroidut integraalit voidaan laske myös toisessa järjestyksessä (Lause 2.9 ja Huomautus 2.10(ii)):

$$\begin{aligned} \iint_T f(x,y)dxdy &= \int_0^1 dy \int_0^1 dx\,(2x+y) = \int_0^1 dy \Big/_0^1 (x^2 + xy) \\ &= \int_0^1 (1+y)dy = \Big/_0^1 (y + \frac{y^2}{2}) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

[1] Tässä laskussa käytetään kahdesti aritmeettisen sarjan summakaavaa $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1+n}{2}\cdot n$ (ensimmäisen ja viimeisen termin keskiarvo kertaa termien lukumäärä).

Tässä tapauksessa integrointijärjestyksen valinta ei sanottavasti vaikuttanut laskujen mutkikkuuteen, mutta yleensä kannattaa aluksi miettiä mikä olisi helpoin järjestys niiden laskemisessa.

Funktion f keskiarvo K joukossa T on määritelmän mukaan

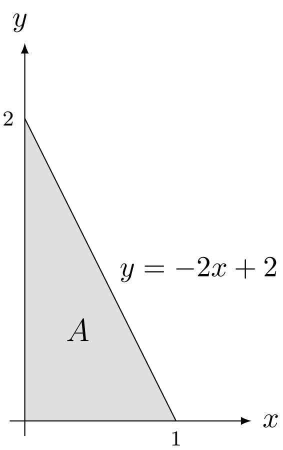
$$K = \frac{\int_T f}{\int_T 1}, \tag{1}$$

joten

$$\int_T f = K \int_T 1. \tag{2}$$

Jos funktion f keskiarvo saadaan jotenkin selville (määritelmää (1) käyttämättä), voidaan kaavasta (2) laskea $\int_T f$. Valistunut arvaus f:n keskiarvoksi joukossa T on $2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ja joukon T pinta-ala $\int_T 1$ on 1, joten kaavasta (2) saadaan arvaus $\int_T f = \frac{3}{2}$.

Tehtävän 3 ratkaisu. $A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y \text{ ja } 2x + y \leqslant 2\}$.



Joukko A voidaan esittää myös seuraavasti

$$A = \big\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ja } 0 \leqslant y \leqslant -2x + 2\big\},$$

joten se on x-projisoituva ja Lauseen 2.15 perusteella

$$\begin{aligned}
\iint_A xy\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^{-2x+2} dy\, xy = \int_0^1 dx \Big/_0^{-2x+2} \frac{xy^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x(-2x+2)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (4x^3 - 8x^2 + 4x)dx \\
&= \frac{1}{2} \Big/_0^1 (x^4 - \frac{8x^3}{3} + 2x^2) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{8}{3} + 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Joukko A voidaan esittää myös seuraavasti

$$A = \Big\{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2 \text{ ja } 0 \leqslant x \leqslant -\frac{y}{2}+1\Big\},$$

joten se on myös y-projisoituva ja Lauseen 2.15 perusteella

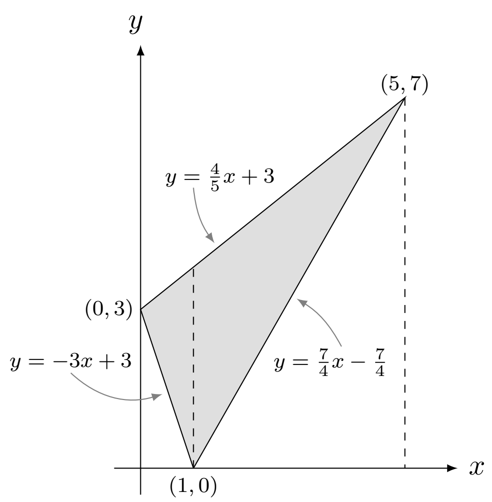
$$\begin{aligned}
\iint_A xy\,dxdy &= \int_0^2 dy \int_0^{-\frac{y}{2}+1} dx\, xy = \int_0^2 dy \Big/_0^{-\frac{y}{2}+1} \frac{x^2y}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \Big(-\frac{y}{2}+1\Big)^2 y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (\frac{y^3}{4} - y^2 + y)dy \\
&= \frac{1}{2}\Big/_0^2 (\frac{y^4}{16} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}) = \frac{1}{2}\cdot(1 - \frac{8}{3} + 2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Kuten edellisessä tehtävässä, nytkään integrointijärjestyksellä ei ollut mainittavaa vaikutusta laskujen sujuvuuteen.

Tehtävän 4 ratkaisu. xy-tason joukon J keskiö on

$$\frac{1}{a(J)}\Big(\iint_J x\,dxdy, \iint_J y\,dxdy\Big),$$

edellyttäen tietenkin, että kyseiset integraalit ovat olemassa ja joukon J pinta-ala $a(J) = \iint_J dxdy$ ei ole nolla.



Olkoon K tehtävän kolmio ABC. Se on sekä x- että y-projisoituva. Molemmissa tapauksissa alarajakäyrä täytyy esittää paloittain. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että kolmio K täytyy jakaa sellaisiin osiin, joissa rajakäyriä ei tarvitse esittää paloittain.

Tässä ratkaisussa käytetään kolmion K x-projisoituvuutta. Olkoot K_1 se kolmion K osuus, jossa $0 \leqslant x \leqslant 1$, ja K_2 se osuus, jossa $1 \leqslant x \leqslant 5$. Joukon pinta-alan määritelmän (Määritelmä 2.4), verkkomonisteen sivulla 44 olevan kohdan (iv) ja Lauseen 2.15 perusteella kolmion K pinta-ala on

$$
\begin{aligned}
a(K) &= \int_K 1 = \int_{K_1} 1 + \int_{K_2} 1 = \int_0^1 dx \int_{-3x+3}^{\frac{4}{5}x+3} dy \; + \int_1^5 dx \int_{\frac{7}{4}x-\frac{7}{4}}^{\frac{4}{5}x+3} dy \\
&= \int_0^1 \frac{19x}{5}\, dx + \int_1^5 (-\frac{19x}{20} + \frac{19}{4}) dx = \Big/_0^1 \frac{19x^2}{10} + \Big/_1^5 (-\frac{19x^2}{40} + \frac{19x}{4}) \\
&= \frac{19}{10} - \frac{95}{8} + \frac{95}{4} + \frac{19}{40} - \frac{19}{4} = \frac{19}{2}.
\end{aligned}
$$

Tietenkin kolmion pinta-alan olisi voinut laskea paljon helpomminkin.

$$
\begin{aligned}
\int_K x &= \int_{K_1} x + \int_{K_2} x = \int_0^1 dx \int_{-3x+3}^{\frac{4}{5}x+3} dy\, x \; + \int_1^5 dx \int_{\frac{7}{4}x-\frac{7}{4}}^{\frac{4}{5}x+3} dy\, x \\
&= \int_0^1 \frac{19x^2}{5}\, dx + \int_1^5 (-\frac{19x^2}{20} + \frac{19x}{4})\, dx \\
&= \Big/_0^1 \frac{19x^3}{15} + \Big/_1^5 (-\frac{19x^3}{60} + \frac{19x^2}{8}) \\
&= \frac{19}{15} - \frac{475}{12} + \frac{475}{8} + \frac{19}{60} - \frac{19}{8} = 19
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
\int_K y &= \int_{K_1} y + \int_{K_2} y = \int_0^1 dx \int_{-3x+3}^{\frac{4}{5}x+3} dy\, y \; + \int_1^5 dx \int_{\frac{7}{4}x-\frac{7}{4}}^{\frac{4}{5}x+3} dy\, y \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\Big(\frac{4}{5}x + 3\Big)^2 - \Big(-3x+3\Big)^2 \Big) dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_1^5 \Big(\Big(\frac{4}{5}x + 3\Big)^2 - \Big(\frac{7}{4}x - \frac{7}{4}\Big)^2 \Big)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \Big/_0^1 \Big(\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \Big(\frac{4}{5}x + 3\Big)^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \Big(-3x+3\Big)^3 \Big) \\
&+ \frac{1}{2} \Big/_1^5 \Big(\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \Big(\frac{4}{5}x + 3\Big)^3 - \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \Big(\frac{7}{4}x - \frac{7}{4}\Big)^3 \Big) \; = \; \ldots \; = \; \frac{95}{3}.
\end{aligned}
$$

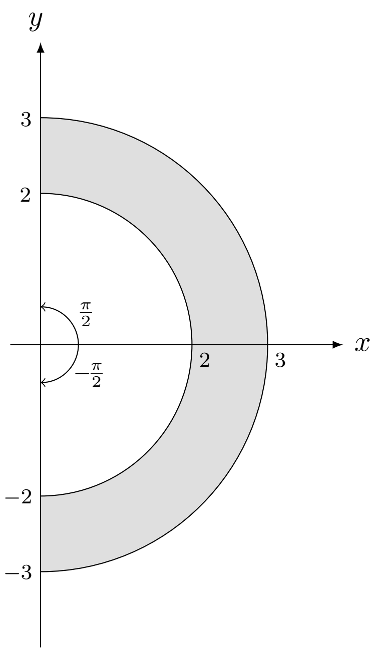
Edellinen integrointi sujuu hieman vaivattomammin toisessa integrointijärjestyksessä, mutta silloin täytyy kolmion jakaa uudestaan kahteen osaan ja selvittää uudet integrointirajat:

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 dy \int_{-\frac{1}{3}y+1}^{\frac{4}{7}y+1} dx\, y \;+\; \int_3^7 dy \int_{\frac{5}{4}y-\frac{15}{4}}^{\frac{4}{7}y+1} dx\, y \\
&= \int_0^3 \frac{19y^2}{21}\, dy + \int_3^7 \Big(-\frac{19y^2}{28} + \frac{19y}{4}\Big)\, dy \\
&= \Big/_0^3 \frac{19y^3}{63} + \Big/_3^7 \Big(-\frac{19y^3}{84} + \frac{19y^2}{8}\Big) \\
&= \frac{57}{7} - \frac{931}{12} + \frac{931}{8} + \frac{171}{28} - \frac{171}{8} = \frac{95}{3}.
\end{aligned}$$

Siis kolmion K keskiö on

$$\frac{1}{a(K)}\Big(\int_K x, \int_K y\Big) = \frac{2}{19}\Big(19, \frac{95}{3}\Big) = \Big(2, \frac{10}{3}\Big).$$

Tehtävän 5 ratkaisu. $A = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \text{ ja } 2^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3^2\}$. Siirrytään napakoordinaatteihin[2]:



$$\begin{aligned}
&x = r\cos\varphi, \\
&y = r\sin\varphi, \\
&2 \leqslant r \leqslant 3 \text{ ja } -\tfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

[2]Tarkkaan ottaen napakoordinaatistossa $\varphi \in [0, 2\pi]$, mutta jaksollisuuden takia voidaan sallia yhtä hyvin mikä tahansa 2π:n pituinen väli. Tämän avulla saadaan tehtävän laskuja yksinkertaistettua. Muuten niissä pitäisi valita $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ ja integroida napakoordinaatistossa yli joukon $[2,3] \times ([0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]) = [2,3] \times [0, \frac{\pi}{2}] \cup [2,3] \times [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

Lisäksi napakoordinaattimuunnoksen Jacobin determinantti on $J(\varphi, r) = r$ (katso verkkomonisteen sivu 52). Napakoordinaattimuunnoksen avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{A} y^2\,dxdy &= \iint\limits_{[2,3]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} (r\sin\varphi)^2|J(r,\varphi)|\,drd\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_2^3 dr\, r^3\sin^2\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \Big/_{2}^{3} \frac{r^4}{4}\sin^2\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{65}{4}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{65}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{65}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\Big(1-\cos 2\varphi\Big)\,d\varphi = \frac{65}{8}\Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big) = \frac{65\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Tehtävän 6 ratkaisu. Kuten edellisessä tehtävässä: $A = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x$ ja $2^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3^2\}$. Integraalit kannattaa taas laskea napakoordinaatistossa:

$$\begin{aligned}
a(A) &= \iint\limits_{A} dxdy = \iint\limits_{[2,3]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} |J(r,\varphi)|\,drd\varphi \\
&= \int_2^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, r = \int_2^3 \pi r\,dr = \Big/_{2}^{3} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{5\pi}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{A} x\,dxdy &= \iint\limits_{[2,3]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} r\cos\varphi\,|J(r,\varphi)|\,drd\varphi \\
&= \int_2^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, r^2\cos\varphi = \int_2^3 dr \Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin\varphi \\
&= \int_2^3 2r^2\,dr = \Big/_{2}^{3} \frac{2r^3}{3} = \frac{38}{3} \quad \text{ja}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{A} y\,dxdy &= \iint\limits_{[2,3]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} r\sin\varphi\,|J(r,\varphi)|\,drd\varphi \\
&= \int_2^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, r^2\sin\varphi \;=\; \int_2^3 dr \Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(-\cos\varphi) \\
&= \int_2^3 0\,dr \;=\; 0.
\end{aligned}
$$

Siis joukon A keskiö on

$$
\frac{1}{a(A)}\Big(\iint_A x\,dydy, \iint_A y\,dxdy\Big) \;=\; \frac{2}{5\pi}\Big(\frac{38}{3},0\Big) \;=\; \Big(\frac{76}{15\pi},0\Big),
$$

missä $\frac{76}{15\pi} \approx 1,61.$