Tehtävän 1 ratkaisu. Merkitään $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Käyrä (ympyrän kaari) $y = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, pyörähtää x-akselin ympäri. Lauseen 1.50 mukaan syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi\int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi\int_0^1 \big(\sqrt{4-x^2}\,\big)^2 dx = \pi\int_0^1 (4-x^2)dx$$
$$= \pi \Big/_0^1 (4x - \frac{x^3}{3}) = \pi(4-\frac{1}{3}) = \frac{11\pi}{3}$$

ja sen vaipan ala on

$$2\pi\int_0^1 |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\big(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}\big)^2}\,dx$$
$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{\big(\sqrt{4-x^2}\,\big)^2 + \big(\sqrt{4-x^2}\,\big)^2\big(\tfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\big)^2}\,dx$$
$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{4-x^2+x^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 2dx = 2\pi\Big/_0^1 2x = 4\pi.$$

Tehtävän 2 ratkaisu. Merkitään $f(x) = (e^x+e^{-x})/2$. Lauseen 1.52 mukaan käyrän $y = f(x)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ pituus on

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1+\big(\tfrac{e^x-e^{-x}}{2}\big)^2}\,dx$$
$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1+\tfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\tfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$
$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\tfrac{(e^x+e^{-x})^2}{4}}\,dx = \int_{-1}^1 \tfrac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$= \Big/_{-1}^1 \tfrac{e^x-e^{-x}}{2} = \tfrac{e-e^{-1}}{2} - \tfrac{e^{-1}-e}{2} = e - e^{-1}.$$

Tehtävän 3 ratkaisu. Käyrä $y = e^{-x}$, $[0,\infty[$, pyörähtää x-akselin ympäri. Välille $[0, M]$, $M > 0$ syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi\int_0^M \big(e^{-x}\big)^2 dx = \pi\int_0^M e^{-2x}dx = \pi\Big/_0^M -\frac{1}{2}e^{-2x}$$
$$= -\frac{\pi}{2}\big(e^{-2M}-1\big) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Siis välille $[0,\infty[$ syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus on $\frac{\pi}{2}$.

Tehtävän 4 ratkaisu. Huomaa, ettei integroitavaa funktiota ole määritelty integrointivälin alkupisteessä $x = 1$. Kyseessä on ns. epäoleellinen integraali ja sillä tarkoitetaan seuraavaa

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{a\to 1+} \int_a^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Olkoon $a \in]1, 2[$. Tehdään yllä olevan yhtälön oikean puolen integraaliin muuttujan vaihto:

$$\begin{cases} t = \sqrt{x-1}, \\ x = t^2 + 1 \text{ ja} \\ dx = \dfrac{d(t^2+1)}{dt}dt = 2tdt. \end{cases}$$

Tällöin integrointirajat muuttuvat seuraavan taulukon mukaisesti

x	t
a	$\sqrt{a-1}$
2	1

ja

$$\int_a^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_{\sqrt{a-1}}^1 \frac{t^2+1}{t} 2tdt = 2\int_{\sqrt{a-1}}^1 (t^2+1)dt$$
$$= 2 \Big/_{\sqrt{a-1}}^1 \left(\frac{t^3}{3} + t\right) = 2\left(\frac{4}{3} - \frac{\left(\sqrt{a-1}\right)^3}{3} - \sqrt{a-1}\right) \xrightarrow[a\to 1+]{} \frac{8}{3}$$

eli

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \frac{8}{3}.$$

Tehtävän 5 ratkaisu. Kun $x \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{x^5}{x^7+1} < \frac{x^5}{x^7} = \frac{1}{x^2}.$$

Lisäksi, kun $M > 1$,

$$\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \Big/_1^M -\frac{1}{x} = -\frac{1}{M} + 1 \xrightarrow[M\to\infty]{} 1,$$

joten $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ suppenee (kohti lukua 1). Majoranttiperiaatteen mukaan tästä seuraa, että myös $\int_1^\infty \frac{x^5}{x^7+1}\,dx$ suppenee.

Kun $x \geqslant 1$,

$$\frac{x^6}{x^7+x^6+1} \geqslant \frac{x^6}{x^7+x^7+x^7} = \frac{1}{3x} \geqslant 0.$$

Lisäksi, kun $M > 1$,

$$\int_1^M \frac{1}{3x}\,dx = \Big/_1^M \frac{\ln x}{3} = \frac{\ln M}{3} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

joten $\int_1^\infty \frac{1}{3x}\,dx$ hajaantuu. Minoranttiperiaatteen mukaan tästä seuraa, että myös $\int_1^\infty \frac{x^6}{x^7+x^6+1}\,dx$ hajaantuu.

Tehtävän 6 ratkaisu. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \leqslant -1, \text{ ja} \\ ae^{-x}, \text{ kun } x > -1, \end{cases}$$

on tiheysfunktio jos ja vain jos

$$\begin{aligned} &(1) && \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \text{ ja} \\ &(2) && f(x) \geqslant 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kun $m < -1$,

$$\int_m^{-1} f(x)dx = \int_m^{-1} 0dx = 0 \underset{m\to-\infty}{\longrightarrow} 0,$$

joten $\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx = 0$. Kun $M > -1$,

$$\int_{-1}^{M} f(x)dx = \int_{-1}^{M} ae^{-x}dx = \Big/_{-1}^{M} -ae^{-x} = -ae^{-M} + ae \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} ae,$$

joten $\int_{-1}^{\infty} f(x)dx = ae$. Niinpä

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{\infty} f(x)dx = ae,$$

katso verkkomonisteen sivulla 34 oleva kaava 1.57 ja siihen liittyvät selitykset. Siis ehto (1) on voimassa jos ja vain jos $a = e^{-1}$. Tällöin myös ehto (2) on voimassa.

Tapahtuman $-1 < X < 0$ todennäköisyys $P(-1 < X < 0)$ on sama kuin tapahtuman $-1 \leqslant X \leqslant 0$, sillä tapahtumien $X = -1$ ja $X = 0$ todennäköisyydet ovat $P(-1 \leqslant X \leqslant -1) = \int_{-1}^{-1} f(x)dx = 0$ ja $P(0 \leqslant X \leqslant 0) = \int_0^0 f(x)dx = 0$. Siksi

$$P(-1 < X < 0) \;=\; P(-1 \leqslant X \leqslant 0) \;=\; \int_{-1}^{0} f(x)dx \;=\; \int_{-1}^{0} e^{-1}e^{-x}dx$$
$$= \Big/_{-1}^{0} - e^{-1}e^{-x} \;=\; -e^{-1} + e^{-1}e \;=\; 1 - e^{-1}.$$