Tehtävän 1 ratkaisu. Olkoon D välin $[0, 2]$ tasavälinen jako n:ään osaan. Tällöin kunkin jakovälin pituus on $\frac{(2-0)}{n} = \frac{2}{n}$ ja

$$\begin{aligned} D &= \big(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\big) = \big(0, 0 + 1 \cdot \tfrac{2}{n}, 0 + 2 \cdot \tfrac{2}{n}, \ldots, 0 + n \cdot \tfrac{2}{n}\big) \\ &= \big(0, \tfrac{2}{n}, \tfrac{4}{n}, \ldots, 2\big). \end{aligned}$$

Koska $f(x) = x^2$ on välillä [0,2] kasvava, niin $M_i = \sup\{x^2 \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\} = x_i^2$ ja yläsummaksi saadaan

$$S_D = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \frac{2}{n}.$$

Vastaavasti alasumman tapauksessa $m_i = \inf\{x^2 \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\} = x_{i-1}^2$ ja alasummaksi saadaan

$$s_D = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 \cdot \frac{2}{n}.$$

Viimeisen vaiheen summausmerkintöjen muutos tehtiin jotta olisi helpompi nähdä miksi seuraavassa kaikki termit kahta lukuun ottamatta kumoutuvat:

$$\begin{aligned} S_D - s_D &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \frac{2}{n} - \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 \cdot \frac{2}{n} \\ &= \Big(\big(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\big) - \big(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2\big)\Big) \cdot \frac{2}{n} \\ &\big(x_n^2 - x_0^2\big) \cdot \frac{2}{n} = \big(2^2 - 0^2\big) \cdot \frac{2}{n} = \frac{8}{n}. \end{aligned}$$

Vaadittu ehto totetuu, kun $\frac{8}{n} < 0,001$, joten $n = 8001$ kelpaa.

(Edellä olevasta laskusta nähdään myös, että $S_D - s_D$ saadaan pienemmäksi kuin mikä tahansa positiivinen luku, kunhan n valitaan kyllin suureksi. Niinpä integroituvuustestin (Lause 1.33) perusteella funktio $f(x) = x^2$ on integroituva välillä $[0, 2]$.)

Tehtävän 2 ratkaisu. Koska $x^2 - x = x(x-1)$, saadaan sopivasti valituilla vakioilla A_1 ja A_2 integroitavalle funktiolle kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ pätevä osamurtokehitelmä:

$$\begin{aligned} &\frac{x+1}{x^2 - x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} \Leftrightarrow \\ &\frac{x+1}{x^2 - x} = \frac{A_1(x-1)}{x(x-1)} + \frac{A_2 x}{x(x-1)} \Leftrightarrow \\ &x + 1 = (A_1 + A_2)x + (-A_1) \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ -A_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = 2 \\ A_1 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x+1}{x^2-x}\,dx &= \int_2^3 \Big(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}\Big)\,dx = \Big/_2^3 \Big(-\ln x + 2\ln(x-1)\Big)\\ &= \Big(-\ln 3 + 2\ln 2\Big) - \Big(-\ln 2 + 2\ln 1\Big)\\ &= 3\ln 2 - \ln 3 = \ln 2^3 - \ln 3 = \ln 8 - \ln 3.\end{aligned}$$

Määrättyä integraalia

$$\int_{-2}^3 \frac{x+1}{x^2-x}\,dx$$

ei ole määritelty, sillä integroitavaa funktiota ei ole määritelty integrointivälin $[-2,3]$ pisteissä 0 ja 1. Lisäksi integroitavan funktion täytyisi olla rajoitettu integrointivälillä $[-2,3]$ (eli pitäisi olla olemassa luku M, jolla $|f(x)| \leqslant M$ kaikilla $x \in [-2,3]$). Nythän se ei ole rajoitettu edes joukossa $[-2,3] \setminus \{0,1\}$.

Tehtävän 3 ratkaisu. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^{-1} x\cdot e^{-3x}dx &= \Big/_0^{-1} x\cdot\big(-\frac{1}{3}e^{-3x}\big) - \int_0^{-1} 1\cdot\big(-\frac{1}{3}e^{-3x}\big)dx\\ &= \frac{1}{3}e^3 + \int_0^{-1}\frac{1}{3}e^{-3x}dx = \frac{1}{3}e^3 + \Big/_0^{-1} -\frac{1}{9}e^{-3x}\\ &= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

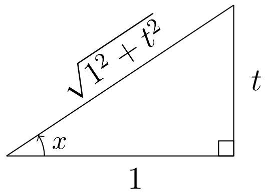
Tehtävän 4 ratkaisu.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4\cos^2 x + \sin^2 x}\,dx$$

Tehdään tässä integraalissa vihjeen mukainen muuttujan vaihto $t = \tan x$, $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$, jolloin $x = \overline{\text{arc}}\tan t$ ja

$$dx = \frac{d\,\overline{\text{arc}}\tan t}{dt}\,dt = \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Rajat muuttuvat seuraavasti: kun $x = \frac{\pi}{4}$, niin $t = \tan\frac{\pi}{4} = 1$, ja kun $x = \frac{\pi}{3}$, niin $t = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Seuraavasta kuvasta nähdään miten $\sin x$ ja $\cos x$ voidaan lausua uuden muuttujan t avulla:



$$\tan x = \frac{t}{1},$$
$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ ja}$$
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Siis nyt saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4\cos^2 x + \sin^2 x}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{4\cdot\frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{4+t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,dt \overset{(1)}{=} \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1+u^2}\,2du \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2} \Big/_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \overline{\text{arc}}\tan u = \frac{1}{2}\Big(\overline{\text{arc}}\tan\frac{\sqrt{3}}{2} - \overline{\text{arc}}\tan\frac{1}{2}\Big),
\end{aligned}$$

missä kohdassa (1) tehtiin vielä muuttujan vaihto $u = \frac{t}{2}$, jolloin $dt = 2du$ ja rajat muuttuva seuraavasti: $u = \frac{1}{2}$, kun $t = 1$ ja $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kun $t = \sqrt{3}$.

Tehtävän 5 ratkaisu. Funktio $\sin\frac{1}{t}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Niinpä Lauseen 1.35 perusteella integraali

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{1}{x}} \sin\frac{1}{t}\,dt$$

on määritelty jos ja vain jos 0 ei kuulu integrointivälille eli integrointirajat ovat samanmerkkiset eli $x > 0$. (Integraalin ylärajan ei kuitenkaan tarvitse olla suurempi kuin alarajan, katso Määritelmä 1.31.) Siis funktion

$$f(x) = \int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{1}{x}} \sin\frac{1}{t}\,dt$$

(laajin mahdollinen) määrittelyjoukko on $]0,\infty[$. Koska funktio $g(t) = \sin\frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on jatkuva, sillä on integraalilaskennan päälauseen (Lause 1.38) perusteella välillä $]0,\infty[$ määritelty integraalifunktio $G(t)$. (Lauseen 1.38 mukaan voidaan valita esimerkiksi $G(t) = \int_{\frac{2}{\pi}}^{t} \sin\frac{1}{u}\,du$.) Tarkkaan ottaen Lauseessa 1.38 käsitellään vain suljettuja välejä, mutta siitä seuraa helposti vastaava tulos yleisemmille väleille. Edelleen Lauseen 1.39 perusteella

$$f(x) = \int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{1}{x}} \sin\frac{1}{t}\,dt = \int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{1}{x}} g(t)\,dt = G\Big(\frac{1}{x}\Big) - G\Big(\frac{2}{\pi}\Big). \tag{1}$$

(Tarkkaan ottaen Lauseessa 1.39 käsitellään vain tapausta, jossa yläraja on suurempi kuin alaraja, mutta se pätee ilmeisten teknisten muutosten jälkeen rajojen suuruusjärjestyksestä riippumatta.) Derivoimalla kaavasta (1) saadaan

$$f'(x) = G'\Big(\frac{1}{x}\Big)D\frac{1}{x} - 0 = g\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = -\frac{1}{x^2}\sin x.$$

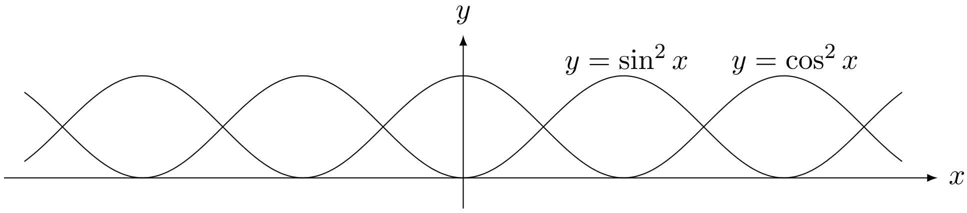
Ehdokkaat funktion f lokaaleiksi ääriarvokohdiksi löytyvät sen derivaatan nollakohdista:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

kun $x > 0$. Koska $f'(x)$:n merkki myös vaihtuu pisteitä $x = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, ohitettaessa, ne ovat funktion $f(x)$ lokaaleja ääriarvokohtia (parittomilla n:n arvoilla minimikohtia ja parillisilla maksimikohtia).

Tehtävän 6 ratkaisu. Käyrien $y = \sin^2 x$ ja $y = \cos^2 x$ leikkauspisteet:

$$\begin{aligned}\sin^2 x = \cos^2 x &\Leftrightarrow |\sin x| = |\cos x| \Leftrightarrow |\tan x| = 1\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$



Näiden käyrien peräkkäisten leikkauskohtiensa välille reunustama ala on Lauseen 1.45(b) perusteella

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}+(n+1)\frac{\pi}{2}} |\sin^2 x - \cos^2 x|\,dx &= \int_{\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}} |-\cos 2x\,|\,dx\\ \overset{(1)}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |-\cos 2x\,|\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \Big/_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2x = 1,\end{aligned}$$

missä kohdassa (1) vedottiin siihen, että $|\cos(2(x+n\frac{\pi}{2}))| = |\cos(2x+n\pi)| = |-\cos(2x)|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}$. Siksi $n \in \mathbb{Z}$ ei vaikuta integraalin arvoon ja voitiin valita $n = -1$.