Tehtävän 1 ratkaisu. Käyrän $y = f(x)$ tangenttisuoran kulmakerroin on $f'(x)$. Pidetään tunnettuna, että tangentti- ja normaalisuorien kulmakertoimien tulo on -1. Siis

$$f'(x) \cdot \frac{2+x^3}{x^2} = -1 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x^2}{2+x^3},$$

kun $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\sqrt[3]{2}\}$. Piste $x = 0$ voitaneen myös hyväksyä vaikkei vaadittua ehtoa ole määritelty siinä. (Voidaan ajatella, että normaalisuoran tulisi olla siinä yhdensuuntainen y-akselin kanssa, jolloin tangenttisuoran pitää olla yhdensuuntainen x-akselin kanssa eli $f'(0) = 0$.) Integroidaan Lauseen 1.6 (15) avulla:

$$f(x) = \int f'(x)dx = -\frac{1}{3}\int \frac{D(2+x^3)}{2+x^3}dx = -\frac{1}{3}\ln|2+x^3| + C,$$

missä integraalifunktion määrittelyväli on $]-\infty, -\sqrt[3]{2}[$ tai $]-\sqrt[3]{2}, \infty[$. Koska käyrä $y = f(x)$ kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta,

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\ln 3 + C = 2 \Leftrightarrow C = 2 + \frac{\ln 3}{3}$$

välin $]-\sqrt[3]{2}, \infty[$ tapauksessa. Jos funktion f määrittelyjoukko valitaan mahdollisimman laajaksi, saadaan $f : \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt[3]{2}\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\ln(-2-x^3) + C, & \text{kun } x < -\sqrt[3]{2} \\ -\dfrac{1}{3}\ln(2+x^3) + 2 + \dfrac{\ln 3}{3}, & \text{kun } x > -\sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

Ehkäpä tavanomaisempaa olisi kuitenkin valita funktion f määrittelyjoukoksi väli $]-\sqrt[3]{2}, \infty[$ (tai $]0, \infty[$, koska vaadittua ehtoa ei ole määritelty pisteessä $x = 0$). Näin siksi, että tehtävä voidaan kirjoittaa differentiaaliyhtälöksi, jotka on tapana ratkaista väleillä. Differentiaaliyhtälöihin tutustutaan kursin lopussa.

Tehtävän 2 ratkaisu. Koska osoittajan polynomin aste on korkeampi (tai yhtäsuuri) kuin nimittäjän, jaetaan ensin jakokulmassa:

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \\ \hline
2x^2+3x-5 & x^3 \\
 & x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x \\ \hline
 & -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x \\
 & -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{15}{4} \\ \hline
 & \frac{19}{4}x - \frac{15}{4}
\end{array}$$

Siis

$$\frac{x^3}{2x^2+3x-5} = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{\frac{19}{4}x - \frac{15}{4}}{2x^2+3x-5}.$$

Nimittäjän polynomin nollakohdat:

$$2x^2+3x-5=0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ tai } x = 1,$$

joten $2x^2+3x-5 = 2(x-(-\frac{5}{2}))(x-1) = 2(x+\frac{5}{2})(x-1)$. Koska nollakohdat ovat reaaliset ja yksinkertaiset, saadaan sopivasti valituilla vakioilla A_1 ja A_2 kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 1\}$ pätevä osamurtokehitelmä:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{19}{4}x - \frac{15}{4}}{2x^2+3x-5} &= \frac{A_1}{x+\frac{5}{2}} + \frac{A_2}{x-1} \Leftrightarrow \\
\frac{\frac{19}{4}x - \frac{15}{4}}{2x^2+3x-5} &= \frac{A_1 2(x-1)}{2(x+\frac{5}{2})(x-1)} + \frac{A_2 2(x+\frac{5}{2})}{2(x+\frac{5}{2})(x-1)} \Leftrightarrow \\
\frac{\frac{19}{4}x - \frac{15}{4}}{2x^2+3x-5} &= \frac{(2A_1+2A_2)x + (-2A_1+5A_2)}{2x^2+3x-5} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2A_1 + 2A_2 = \frac{19}{4} \\ -2A_1 + 5A_2 = -\frac{15}{4} \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2A_1 + 2A_2 = \frac{19}{4} \\ \quad\quad + 7A_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2}(\frac{19}{4} - 2A_2) = \frac{125}{56} \\ A_2 = \frac{1}{7}, \end{cases}$$

missä kohdassa (1) ylempi yhtälö lisättiin alempaan. Niinpä

$$\frac{x^3}{2x^2+3x-5} = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{\frac{125}{56}}{x+\frac{5}{2}} + \frac{\frac{1}{7}}{x-1}$$

ja

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{2x^2+3x-5}dx &= \int \frac{x}{2}dx - \int \frac{3}{4}dx + \int \frac{\frac{125}{56}}{x+\frac{5}{2}}dx + \int \frac{\frac{1}{7}}{x-1}dx \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{125}{56}\ln|x+\frac{5}{2}| + \frac{1}{7}\ln|x-1| + C,\end{aligned}$$

missä määrittelyväli on $]-\infty,-\frac{5}{2}[$, $]-\frac{5}{2},1[$ tai $]1,\infty[$.

Tehtävän 3 ratkaisu. Täydennetään neliöksi:

$$\begin{aligned}3x^2+x+1 &= 3\Big(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\Big) = 3\Big(\Big(x+\frac{1}{6}\Big)^2-\Big(\frac{1}{6}\Big)^2+\frac{1}{3}\Big) \\ &= 3\Big(\Big(x+\frac{1}{6}\Big)^2+\frac{11}{36}\Big).\end{aligned}$$

Huomaa erityisesti, että tällä toisen asteen polynomilla ei ole reaalisia nollakohtia. Koska osoittaja on vakio, voidaan menetellä seuraavasti:

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{3x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{3\big(\big(x+\frac{1}{6}\big)^2+\frac{11}{36}\big)}\,dx \\ &= \frac{1}{3\cdot\frac{11}{36}}\int \frac{1}{\frac{36}{11}\big(x+\frac{1}{6}\big)^2+1}\,dx = \frac{12}{11}\int \frac{1}{\big(\frac{6}{\sqrt{11}}x+\frac{1}{\sqrt{11}}\big)^2+1}\,dx \\ &\overset{(1)}{=} \frac{12}{11}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}\,dt = \frac{2}{\sqrt{11}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{2}{\sqrt{11}}\,\overline{\arctan}(t)+C \\ &= \frac{2}{\sqrt{11}}\,\overline{\arctan}\Big(\frac{6}{\sqrt{11}}x+\frac{1}{\sqrt{11}}\Big)+C,\end{aligned}$$

missä $x\in\,]-\infty,\infty[$ ja kohdassa (1) merkitään

$$t = \big(\tfrac{6}{\sqrt{11}}x+\tfrac{1}{\sqrt{11}}\big),$$

jolloin

$$x = \tfrac{\sqrt{11}}{6}\big(t-\tfrac{1}{\sqrt{11}}\big) = \tfrac{\sqrt{11}}{6}t-\tfrac{1}{6},$$

ja

$$dx = \frac{d\big(\frac{\sqrt{11}}{6}t-\frac{1}{6}\big)}{dt}\,dt = \tfrac{\sqrt{11}}{6}\,dt.$$

Tehtävän 4 ratkaisu. Edellisen tehtävän perusteella toisen asteen tekijällä $3x^2+x+1$ ei ole reaalisia nollakohtia. Lisäksi $x=1$ on nimittäjän polynomin yksinkertainen reaalinen nollakohta. Niinpä nyt saadaan sopivasti valituilla vakioilla A_1, B_1 ja A_2 kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pätevä osamurtokehitelmä:

$$\begin{aligned}
\tfrac{x}{(3x^2+x+1)(x-1)} &= \tfrac{A_1x+B_1}{3x^2+x+1} + \tfrac{A_2}{x-1} \Leftrightarrow \\
\tfrac{x}{(3x^2+x+1)(x-1)} &= \tfrac{(A_1x+B_1)(x-1)}{(3x^2+x+1)(x-1)} + \tfrac{A_2(3x^2+x+1)}{(3x^2+x+1)(x-1)} \Leftrightarrow \\
\tfrac{x}{(3x^2+x+1)(x-1)} &= \tfrac{(A_1+3A_2)x^2+(-A_1+B_1+A_2)x+(-B_1+A_2)}{(3x^2+x+1)(x-1)} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_1+3A_2=0 \\ -A_1+B_1+A_2=1 \\ -B_1+A_2=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A_1+3A_2=0 \\ 5A_2=1 \\ -B_1+A_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1=-\frac{3}{5} \\ A_2=\frac{1}{5} \\ B_1=\frac{1}{5}, \end{cases}$$

missä kohdassa (1) ylin ja alin yhtälö on lisätty keskimmäiseen. Muokataan vielä saatua osamurtokehitelmää niin, että voidaan käyttää Lausetta 1.6 (15):

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{(3x^2+x+1)(x-1)} = \frac{-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}}{3x^2+x+1} + \frac{\frac{1}{5}}{x-1} \\
&= -\frac{1}{10}\cdot\frac{6x-2}{3x^2+x+1} + \frac{\frac{1}{5}}{x-1} \\
&= -\frac{1}{10}\cdot\frac{D(3x^2+x+1)}{3x^2+x+1} + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{3x^2+x+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{D(x-1)}{x-1}.
\end{aligned}$$

Tätä kaavaa, Lausetta 1.6 (15) ja edellisen tehtävän vastausta käyttäen saadaan:

$$\int \frac{x}{(3x^2+x+1)(x-1)}\,dx = -\frac{1}{10}\ln(3x^2+x+1) + \frac{3}{5\sqrt{11}}\,\overline{\text{arc}}\tan\Big(\frac{6}{\sqrt{11}}x+\frac{1}{\sqrt{11}}\Big) + \frac{1}{5}\ln|x-1| + C,$$

missä määrittelyväli on $]-\infty,1[$ tai $]1,\infty[$.

Tehtävän 5 ratkaisu. $x^3+x^2=(x-0)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ tai $x=-1$. Nollakohdat ovat reaaliset, $x=0$ on kaksinkertainen nollakohta ja $x=-1$ on yksinkertainen nollakohta. Niinpä sopivasti valituilla vakioilla A_1, A_2 ja A_3 saadaan kaikilla $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ pätevä osamurtokehitelmä:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{A_1}{x-0} + \frac{A_2}{(x-0)^2} + \frac{A_3}{x-(-1)} \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{A_1x(x+1)}{x^2(x+1)} + \frac{A_2(x+1)}{x^2(x+1)} + \frac{A_3x^2}{x^2(x+1)} \Leftrightarrow \\
&1 = (A_1+A_3)x^2 + (A_1+A_2)x + A_2 \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} A_1+A_3=0 \\ A_1+A_2=0 \\ A_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3=1 \\ A_1=-1 \\ A_2=1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

ja Lauseen 1.6 avulla saadaan

$$\int \frac{1}{x^3+x^2}\,dx = -\ln|x| - x^{-1} + \ln|x+1| + C,$$

missä määrittelyväli on $]-\infty,-1[,\ \ ]-1,0[$ tai $]0,\infty[$.

Tehtävän 6 ratkaisu. Merkitään integraalissa

$$\int \frac{1}{x(1-\sqrt{x})}\,dx$$

$\sqrt{x} = t$, jolloin $x = t^2$,

$$dx = \frac{d(t^2)}{dt}\,dt = 2tdt$$

ja saadaan

$$\int \frac{1}{x(1-\sqrt{x})}\,dx = \int \frac{1}{t^2(1-t)}2tdt = \int \frac{-2}{t(t-1)}\,dt.$$

Nimittäjän polynomin nollakohdat: $t(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ tai $t = 1$. Ne ovat reaaliset ja yksinkertaiset (supistamisen jälkeen). Niinpä sopivasti valituilla vakioilla A_1 ja A_2 saadaan kaikilla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ pätevä osamurtokehitelmä:

$$\begin{aligned}
\frac{-2}{t(t-1)} &= \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t-1} \Leftrightarrow \\
\frac{-2}{t(t-1)} &= \frac{A_1(t-1)}{t(t-1)} + \frac{A_2 t}{t(t-1)} \Leftrightarrow \\
-2 &= (A_1+A_2)t + (-A_1) \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ -A_1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2=-2 \\ A_1=2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{-2}{t(t-1)} = \frac{2}{t} - \frac{2}{t-1}$$

ja

$$\begin{aligned}
\int \frac{-2}{t(t-1)}\,dt &= \int \frac{2}{t}\,dt - \int \frac{2}{t-1}\,dt = 2\ln|t| - 2\ln|t-1| + C \\
&= 2\ln\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}-1| + C \\
&= \ln x - 2\ln|\sqrt{x}-1| + C,
\end{aligned}$$

missä $x \in]0,1[$ tai $x \in]1,\infty[$.