Tehtävän 1 ratkaisu. Tämän tehtävän voisi ratkaista helposti eliminoimalla toisen muuttujista: $y^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x^2}$, joten tehtävä palautuu yhden muuttujan funktion $f(x, \sqrt[3]{x^2}) = \sqrt[3]{x^2}$ pienimmän arvon etsimiseen joukossa $\mathbb{R}$, joka on kutakuinkin itsestään selvästi 0. Tässä on kuitenkin tarkoitus harjoitella Lagrangen menetelmän käyttöä ja erityisesti saadaan esimerkki tapauksesta, jossa Lagrangen menetelmän ensimmäistä yhtälöryhmää ei voi sivuuttaa.

Olkoot $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = y^3 - x^2$, ja $B = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$. Huomaa, ettei joukko B ole rajoitettu, joten se ei ole kompakti eikä jatkuvakaan funktio välttämättä saa siinä pienintä arvoa. Kuitenkin, jos funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y$, on pienin arvo joukossa B, siihen liittyvä ääriarvokohta löytyy Lagrangen menetelmän perusteella (Lauseen 4.36 versio) seuraavien yhtälöryhmien ratkaisuista

$$\begin{cases} \nabla g(x, y) = \bar{0} \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = \bar{0} \text{ jollakin } \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \\ y^3 - x^2 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

joten saatiin ehdokas $f(0, 0) = 0$. Jälkimmäisestä yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} 0 + \lambda 2x = 0 \\ 1 - \lambda 3y^2 = 0 \\ y^3 - x^2 = 0, \end{cases}$$

jolla ei ole ratkaisuja (ensimmäinen yhtälö pätee vain jos $\lambda = 0$ tai $x = 0$, mutta kummassakaan tapauksessa kaksi alempaa yhtälöä ei voi päteä).

Enää tarvitsee osoittaa, että funktiolla f on pienin arvo joukossa B. Pienimmän arvon olemassa olo todistetaan sopivan kompaktin apujoukon $K \subset B$ avulla. Valitaan $K = \{(t^3, t^2) : |t| \leqslant 1\}$. (Valinta $K = \{(0, 0)\}$ kelpaisi myös, mutta olisi hieman kiusallinen, koska silloin kaikki edellä laskettu osoittautuisi turhaksi). Täsmällistä perustelua sille, että K on kompakti, ei tällä kurssilla vaadita. Kyllähän se suljetulta vaikuttaa ($\mathbb{R} \setminus K$ tuntuu avoimelta) ja rajoitettu se ainakin on. On helppo nähdä, että $(0, 0) \in K$ ja $f(x, y) > f(0, 0) = 0$ kaikilla $(x, y) \in B \setminus K$. Siksi, jos funktiolla f on pienin arvo joukossa B, se saavutetaan joukossa K. Toisaalta jatkuva funktio f saa pienimmän arvon kompaktissa joukossa K, jonka siis täytyy olla f:n pienin arvo myös B:ssä.

Tehtävän 2 ratkaisu. Etäisyydellä ja sen neliöllä on samat ääriarvokohdat, koska toiseen potenssiin korottaminen on välillä $[0, \infty[$ aidosti monotoninen funktio. Siksi voidaan aluksi selvittää etäisyyden neliön minimikohta. Tämä helpottaa hieman laskuja. Pisteiden (x, y, z) ja $(0, 0, 0)$ etäisyyksien neliö on $f(x, y, z) = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Siis selvitetään ensin tämän funktion pienin arvo annettujen tasojen leikkaussuoralla (mikäli pienin arvo on olemassa). Olkoot $g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_1(x, y, z) = 4x + 2y - 3z$, $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_2(x, y, z) = x+2y+2z-5$ ja $B = g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0) = \{(x, y, z) \mid g_1(x, y, z) = 0 \text{ ja } g_2(x, y, z) = 0\}$.

Koska $\nabla g_1(x, y, z) = (4, 2, -3)$ ja $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 2, 2)$ ovat lineaarisesti riippumattomat (eli $a(4, 2, -3) + b(1, 2, 2) = (0, 0, 0)$ vain kun $a = 0$ ja $b = 0$) koko leikkaussuoralla (jopa koko $\mathbb{R}^3$:ssa), pätee etsityssä minimikohdassa, mikäli sellainen on olemassa, Lagrangen menetelmän (Lauseen 4.39 versio) mukaan[1]

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) - \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) - \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z) = \bar{0} \text{ joillakin } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2y - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2z + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x - 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -4x + 2y + 6\lambda_1 = 0 \\ -4x + 2z + 11\lambda_1 = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} 44x - 22y \; (= 66\lambda_1) = 24x - 12z \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x - 22y + 12z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \begin{cases} -62y - 28z = -100 \\ -6y - 11z = -20 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \overset{(4)}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{257}{3} z = \frac{320}{3} \\ -6y - 11z = -20 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{320}{257} \\ y = \frac{270}{257} \\ x = \frac{105}{257}, \end{cases}$$

missä kohdassa (1) ensimmäinen yhtälö on lisätty luvulla -2 kerrottuna toiseen ja kolmanteen yhtälöön, kohdassa (2) $66\lambda_1$ on ratkaistu toisesta ja kolmannesta yhtälöstä, kohdassa (3) kolmas yhtälö on lisätty luvulla -20 kerrottuna ensimmäiseen ja luvulla -4 kerrottuna toiseen yhtälöön sekä kohdassa (4) toinen yhtälö on lisätty luvulla $-\frac{62}{6}$ kerrottuna ensimmäiseen.

Siis ainoa ehdokas ääriarvokohdaksi on $(\frac{105}{257}, \frac{270}{257}, \frac{320}{257})$. Jos f:llä on pienin arvo leikkaussuoralla B, se saavutetaan tässä pisteessä Lagrangen mene-

[1]Huomaa, että tämän yhtälöryhmän ratkaisujen selvittelyssä riittää implikaatioketju kunhan huolehditaan, että ehdokkaat kuuluvat tasojen leikkaussuoralle eli $g_1(x, y, z) = 0$ ja $g_2(x, y, z) = 0$. Mahdolliset ylimääräiset ehdokkaat, jotka eivät toteuta alkuperäistä yhtälöryhmää, karsiutuvat loppuvertailussa pois (mikäli pienin arvo on olemassa).

telmän perusteella (Lause 4.39). Siis enää riittää osoittaa, että f:llä on pienin arvo B:ssä. Leikkaussuora B ei ole kompakti, koska se ei ole rajoitettu. Siltä voidaan kuitenkin selvästi valita jana J niin, että $f(x,y,z) > f(\frac{105}{257}, \frac{270}{257}, \frac{320}{257})$ kaikilla $(x,y,z) \in B \setminus J$. Koska jana J on kompakti, jatkuva funktio f saa siinä pienimmän arvon. Se on samalla tietenkin funktion f pienin arvo joukossa B. Niinpä kysytty lyhin etäisyys on olemassa ja se on

$$\sqrt{f(\tfrac{105}{257}, \tfrac{270}{257}, \tfrac{320}{257})} = \sqrt{\tfrac{725}{257}} \approx 1,68.$$

Tehtävän 3 ratkaisu.

$$y' = \frac{y-1}{x} \quad \text{eli} \quad y' = \frac{1}{x} \cdot (y-1) \tag{1}$$

on separoituva differentiaaliyhtälö. Sen erikoisratkaisut ovat vakiofunktioita, jotka saadaan yhtälön $y - 1 = 0$ ratkaisuista. Siis sillä on vain yksi välillä[2] $]0,\infty[$ määritelty erikoisratkaisu $y(x) = 1$, $x \in]0,\infty[$. Toinen samanlainen löytyy väliltä $]-\infty,0[$. Se voidaan kuitenkin nyt jättää huomiotta, koska alkuarvopiste $x = 1$ ei kuulu välille $]-\infty,0[$. Tästä nähdään, että alkuehdon $y(1) = 1$ toteuttava ratkaisu on $y(x) = 1$, $x \in]0,\infty[$. Muut yhtälön (1) ratkaisut eivät toteuta tätä alkuehtoa[3] ja ne saadaan kaavasta

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln|y-1| = \ln|x| + C_1 \ \Leftrightarrow \\ &|y-1| = C_2|x| \ \Leftrightarrow \ y - 1 = Cx \ \Leftrightarrow \ y(x) = 1 - Cx,\end{aligned} \tag{2}$$

missä $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 = e^{C_1} > 0$ ja $C = \pm C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tässäkin ratkaisuväli on joko $]-\infty,0[$ tai $]0,\infty[$ ja ensimmäinen ratkaisuväli ei tule kyseeseen, koska alkuarvopiste $x = 1$ ei kuulu sinne. Alkuehdon $y(1) = 0$ toteuttava ratkaisut saadaan kaavasta (2) valitsemalla $C = 1$.

Tehtävän 4 ratkaisu. Kun $x \geqslant 0$, differentiaaliyhtälön $y' = \sqrt{xy}$ ratkaisulle pätee $y(x) \geqslant 0$, joten se voidaan tällöin kirjoittaa separoituvaan muotoon:

$$y' = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}. \tag{3}$$

Separoituvan differentiaaliyhtälön (3) erikoisratkaisut saadaan yhtälön $\sqrt{y} = 0$ ratkaisuista. Siis sillä on erikoisratkaisu $y(x) = 0$, $x \in [0,\infty[$. (Huomaa,

[2]Differentiaaliyhtälöt ratkaistaan aina jollakin välillä. Lisäksi ratkaisuväli pyritään valitsemaan mahdollisimman laajaksi.

[3]Tämä voidaan osoittaa alkuarvotehtävien ratkaisujen olomassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen (katso verkkomonisteen Esimerkki 5.7 (iii)) avulla.

että yhtälössä (3) on oltava $x \geqslant 0$, mutta alkuperäisessä yhtälössä $y' = \sqrt{xy}$ ratkaisuväli voidaan valita laajemmaksi: $y(x) = 0$, $x \in \,]-\infty, \infty[$.) Tämä erikoisratkaisu ei kuitenkaan toteuta alkuehtoa $y(2) = 2$. Yhtälön (3) ratkaisut, joilla $y > 0$, saadaan kaavasta[4]

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y &= \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\\ 2y^{\frac{1}{2}} &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1 \;\Leftrightarrow\\ y(x) &= \big(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\big)^2,\end{aligned}$$

missä $C = C_1/2 \in \mathbb{R}$ ja ratkaisuväli on sellainen välin $[0, \infty[$ osaväli, että siellä pätee: $y(x) > 0$. Siis ratkaisuväli on $[0, \infty[$, jos $C > 0$, ja $]\sqrt[3]{9C^2}, \infty[$, jos $C \leqslant 0$. Myös tapauksessa $C \leqslant 0$ voidaan ratkaisuväli laajentaa puoliavoimeksi: $[\sqrt[3]{9C^2}, \infty[$. Tämä nähdään siitä, että tällä funktiolla on oikeanpuoleinen derivaatta myös päätepisteessä ja sitä käyttäen yhtälö (3) toteutuu myös päätepisteessä.[5]

Vakio C saadaan ratkaistua alkuehdosta:

$$\begin{aligned}&y(2) = 2 \;\Leftrightarrow\; \big(\frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}} + C\big)^2 = 2 \;\Leftrightarrow\\ &C = \sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{8} = \sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \;\; (> 0).\end{aligned}$$

Siis yhtälölle (3) löydettiin alkuehdon $y(2) = 2$ toteuttava ratkaisu

$$y(x) = \Big(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\Big)^2 = \frac{1}{9}\big(x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\big)^2,$$

missä ratkaisuväli on $[0, \infty[$. Alussa tehdyn havainnon perusteella tämä ratkaisu toteuttaa myös alkuperäisen alkuarvotehtävän $y' = \sqrt{xy}$ ja $y(2) = 2$.

[4]Tässä vedotaan mm. alkuarvotehtävien ratkaisujen olomassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseeseen, katso verkkomonisteen Esimerkki 5.7 (iii).

[5]Huomaa, että tapauksen $C \leqslant 0$ välin päätepisteessä $y(\sqrt[3]{9C^2}) = 0$ ja yhtälö (3) ei toteuta alkuarvotehtävien ratkaisujen olomassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen oletuksia tällä alkuehdolla (katso verkkomonisteen Esimerkki 5.7 (iii)). Siksi kaikkia yhtälön (3) ratkaisuja ei vielä ole välttämättä löydetty. (Eikä olekaan, tapauksen $C < 0$ ratkaisuja voitaisiin laajentaa asettamalla $y(x) = 0$, kun $x \in [0, \sqrt[3]{9C^2}[$. Lisäksi alkuperäisellä yhtälöllä $y' = \sqrt{xy}$ on ratkaisut $y(x) = -(\frac{1}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + C_2)^2$, missä ratkaisuväli on $x \in \,]-\infty, 0]$, jos $C_2 > 0$, ja $]-\infty, -\sqrt[3]{9C_2^2}]$, jos $C_2 \leqslant 0$. Edelleen, tapauksen $C_2 \leqslant 0$ ratkaisuja voidaan laajentaa liittämällä niitä kohdista $y(x_0) = 0$ jo löydettyjen ratkaisujen kanssa (muista tässä palapelissä myös ratkaisu $y(x) = 0$, $x \in \,]-\infty, \infty[$). Näin alkuperäiselle yhtälölle $y' = \sqrt{xy}$ saadaan esimerkiksi ratkaisu $y(x) = \frac{1}{9}x^3$, $x \in \,]-\infty, \infty[$.) Ei kuitenkaan selvitellä asiaa sen enempää, koska alkuehdon $y(2) = 2$ tapauksessa $C > 0$.

Tätä ratkaisua ei voi laajentaa alkuperäisen alkuarvotehtävän tapauksessakaan millään tavalla laajemmalle välille.[6] Tämä johtuu siitä, että $y(0) > 0$ ja $y(x)$ on jatkuva (jopa derivoituva). Jos ratkaisuväliä $[0, \infty[$ voitaisiin laajentaa, pätisi jatkuvuuden perusteella $y(x) > 0$ kaikilla $x \in]-\delta, \delta[$ jollakin $\delta > 0$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä tällöin lauseketta $\sqrt{xy(x)}$ ei olisi määritelty välillä $]-\delta, 0[$.

Tehtävän 5 ratkaisu, ratkaisutapa I. Kun $x > 0$ (tai $x < 0$), differentiaaliyhtälö $xy' - 2y = 2$ on yhtäpitävä seuraavan yhtälön kanssa

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{2}{x}. \tag{4}$$

Yhtälö (4) on ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoinen lineaarinen epähomogeeninen differentiaaliyhtälö. Sitä vastaava homogeeninen yhtälö on

$$y' - \frac{2}{x}y = 0. \tag{5}$$

Tämä on separoituva yhtälö ja sen yleinen ratkaisu on (katso verkkomonisteen Esimerkki 5.9 (iii) tai laske itse)

$$y(x) = Ce^{2\ln|x|} = Ce^{\ln x^2} = Cx^2, \tag{6}$$

missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio ja ratkaisuväli on $]0, \infty[$ (tai $]-\infty, 0[$).

Etsitään seuraavaksi yhtälölle (4) yksittäinen ratkaisu yritteellä, joka saadaan homogeenisen yhtälön yleisestä ratkaisusta (6) korvaamalla siinä vakio C derivoituvalla funktiolla (jota perinteisesti merkitään hieman harhaanjohtavasti $C(x)$:llä). Tätä kutsutaan vakion varioinniksi. Siis yrite on $y(x) = C(x)x^2$ ja $y'(x) = C'(x)x^2 + C(x)2x$. Sijoittamalla nämä yhtälöön (4) saadaan

$$\begin{aligned}
&C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \\
&C'(x)x^2 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow C'(x) = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow \\
&C(x) = -\frac{1}{x^2} + D.
\end{aligned}$$

Koska yksittäinen ratkaisu riittää, voidaan integrointivakioksi valita $D = 0$. Niinpä yhtälölle (4) löydettiin yksittäinen ratkaisu

$$y(x) = C(x)x^2 = -1, \tag{7}$$

[6] Tässä ei voi käyttää alkuarvotehtävien ratkaisujen olomassaolo- ja yksikäsitteisyyslausetta, koska ei voida valita avointa (ja yhtenäistä) joukkoa (D verkkomonisteen Esimerkissä 5.7 (iii)), jossa sitä sovellettaisiin alkuehtoon $y(0) = (\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{8}\,)^2$.

missä ratkaisuväli on $]0,\infty[$ (tai $]-\infty,0[$). Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden teorian (katso verkkomonisteen sivut 118-119) perusteella differentiaaliyhtälön (4) yleinen ratkaisu on vastaavan homogeenisen yhtälön (5) yleisen ratkaisun (6) ja alkuperäisen yhtälön (4) minkä tahansa ratkaisun, esimerkiksi ratkaisun (7), summa:

$$y(x) = Cx^2 - 1,$$

missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio ja ratkaisuväli on $]0,\infty[$ (tai $]-\infty,0[$).

Alkuehto määrää vakion C:

$$y(2) = 3 \Leftrightarrow C2^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow C = 1.$$

Siis alkuehdon $y(2) = 3$ toteuttava yhtälön (4) ratkaisu on

$$y(x) = x^2 - 1,$$

missä $x \in]0,\infty[$, sillä alkuehto oli annettu tälle välille kuuluvassa pisteessä. (Sijoittamalla voi vielä huomata, että $y(x) = x^2 - 1$ toteuttaa alkuarvotehtävän $xy' - 2y = 2$ ja $y(2) = 3$ myös laajemmalla välillä $]-\infty,\infty[$.)

Tehtävän 5 ratkaisu, ratkaisutapa II. Käytetään integroivaa tekijää, katso verkkomonisteen sivut 120-121. Ratkaisutavassa I esiintyneen yhtälön

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{2}{x}. \tag{8}$$

ns. integroiva tekijä on $Ce^{F(x)}$, missä $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $F(x)$ on mikä tahansa funktion $-\frac{2}{x}$ integraalifunktio, esimerkiksi $F(x) = -2\ln|x|$. Siis integroivaksi tekijäksi voidaan valita $e^{-2\ln|x|} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$. Kertomalla yhtälö (8) puolittain integroivalla tekijällä saadaan

$$\begin{aligned} &y' - \frac{2}{x}y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^{-2}y' - 2x^{-3}y = 2x^{-3} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2}y) = 2x^{-3} \Leftrightarrow \\ &x^{-2}y = -x^{-2} + C \Leftrightarrow y(x) = -1 + Cx^2, \end{aligned}$$

kun $x > 0$ (tai $x < 0$). Kuten ratkaisutavassa I, alkuehdosta saadaan $C = 1$.

Tehtävän 6 ratkaisu. Merkitään $u(x) = y'(x)$, jolloin

$$y'' = x(y')^2 \Leftrightarrow u' = xu^2.$$

Differentiaaliyhtälö $u' = xu^2$ on separoituva ja sillä on erikoisratkaisu $u(x) = 0$, $x \in]-\infty,\infty[$. Tällöin $y'(x) = 0$ kaikilla $x \in]-\infty,\infty[$, joten se ei toteuta ehtoa $y'(0) = -2$.

Muut yhtälön $u' = xu^2$ ratkaisut saadaan kaavasta[7]

$$\int \frac{1}{u^2}\,du = \int x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \Leftrightarrow u(x) = -\frac{2}{x^2 + 2C_1}.$$

Siis

$$y'(x) = -\frac{2}{x^2 + 2C_1}$$

ja ehdosta $y'(0) = -2$ saadaan $2C_1 = 1$. Niinpä

$$y'(x) = -\frac{2}{x^2 + 1},$$

mistä saadaan integroimalla

$$y(x) = -2\,\overline{\mathrm{arc}}\tan x + C_2.$$

Lopuksi, ehdosta $y(0) = 1$ saadaan $C_2 = 1$, joten vastaus on

$$y(x) = -2\,\overline{\mathrm{arc}}\tan x + 1, \quad x \in \,]-\infty, \infty[.$$

[7] Tässä vedotaan jälleen mm. alkuarvotehtävien ratkaisujen olomassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseeseen, katso verkkomonisteen Esimerkki 5.7 (iii).