Tehtävän 1 ratkaisu. Merkitään suorakulmaisen kannettoman laatikon sivujen pituuksia kirjaimilla x, y ja z. Valitaan ne lisäksi niin, että xy on laatikon pohjan pinta-ala, jolloin muiden sivujen pinta-ala on yhteensä $2xz+2yz$. Tällöin koko laatikon pinta-ala on

$$xy + 2xz + 2yz.$$

Koska sen tilavuus on $xyz = V$, niin $z = \frac{V}{xy}$ ja laatikon pinta-ala voidaan kirjoittaa muotoon

$$xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}.$$

Siis on etsittävä funktion $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$, pienin arvo (mikäli se on olemassa).

Koska funktion f määrittelyjoukko $]0,\infty[\times]0,\infty[$ on avoin, se saa pienimmän arvonsa (mikäli se on olemassa) määrittelyjoukkonsa sisäpisteessä. Siksi se on myös f:n lokaali ääriarvokohta (Määritelmässä 4.15 lokaalit ääriarvot määritellään vain sisäpisteissä). Lauseen 4.17 perusteella ehdokkaat f:n lokaaleiksi ääriarvokohdiksi löytyvät sen gradientin $\bar{0}$-kohdista:

$$\nabla f(x,y) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2V}{x^2} \\ x(1 - \frac{1}{2V}x^3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{2V} \\ y = \sqrt[3]{2V}. \end{cases}$$

Siis, jos funktiolla f on pienin arvo, se on

$$f(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = \sqrt[3]{4V^2} + \frac{4V}{\sqrt[3]{2V}} = \sqrt[3]{4V^2} + \sqrt[3]{32V^2},$$

jolloin laatikon sivujen pituudet ovat

$$x = \sqrt[3]{2V}, \; y = \sqrt[3]{2V} \;\text{ ja }\; z = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$

Osoitetaan lopuksi, että funktiolla f todella on pienin arvo. Valitaan tätä varten kompakti (suljettu ja rajoitettu) apujoukko $K \subset]0,\infty[\times]0,\infty[$ niin, että ainoa ääriarvokohtaehdokas $(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ on sen sisäpiste ja funktion f arvot on helppo arvioida sen reunalla ja ulkopuolella lukua $f(x_0,y_0)$ suuremmiksi. Esimerkiksi

$$K = [a,b] \times [a,b]$$

kelpaa, kunhan $a > 0$ valitaan kyllin pieneksi ja $b > 0$ kyllin suureksi. Tämä nähdään seuraavasti. Jos $0 < x \leqslant a$, niin $\frac{2V}{x} \geqslant \frac{2V}{a} > f(x_0,y_0)$, kun $a > 0$ on kyllin pieni (esimerkiksi $a = \frac{V}{f(x_0,y_0)}$ kelpaa). Samoin, jos $0 < y \leqslant a$, niin $\frac{2V}{y} > f(x_0, y_0)$, kun $a > 0$ on kyllin pieni (myös tässä $a = \frac{V}{f(x_0,y_0)}$ kelpaa). Jäljelle jääneissä tapauksissa sekä x että y ovat suurempia kuin a ja ainakin toinen niistä on vähintään yhtäsuuri kuin b (muutenhan oltaisiin K:n sisäpisteessä), jolloin puolestaan $xy > ab > f(x_0, y_0)$ kun b on kyllin suuri (esimerkiksi $b = \frac{2f(x_0,y_0)}{a}$ kelpaa). Siis $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, kun $(x, y) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$ ei ole joukon K sisäpiste.

Toisaalta kompaktissa joukossa K jatkuva funktio f saa pienimmän arvon (Lause 4.27). Se saavutetaan joko K:n sisäpisteessä, jolloin $\nabla f(x, y) = \bar{0} \Leftrightarrow (x, y) = (x_0, y_0)$, tai K:n reunalla. Reuna ei kuitenkaan tule kysymykseen, sillä siellä $f(x, y) > f(x_0, y_0)$. Siksi funktion f pienin arvo joukossa K on $f(x_0, y_0)$, joka on edellä osoitetun perusteella myös f:n pienin arvo koko sen määrittelyjoukossa $]0, \infty[\times]0, \infty[$.

Tehtävän 2 ratkaisu. Koska funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2-6x+y^2-2y$, on jatkuva, se saa suurimman ja pienimmän arvon kompaktissa (suljetussa ja rajoitetussa) joukossa $A = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ja } 0 \leqslant y \leqslant 2\}$. Ne saavutetaan joko A:n sisäpisteissä, jolloin $\nabla f(x, y) = \bar{0}$ (Lause 4.17), tai A:n reunalla. Nyt

$$\nabla f(x, y) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Koska $(3, 1)$ on joukon A sisäpiste, saatiin ehdokas $f(3, 1) = \underline{-10}$.

Reunan osa I: $x = 1$ ja $0 \leqslant y \leqslant 2$. Merkitään: $g_1(y) = f(1, y) = -5 + y^2 - 2y$. Koska $g_1'(y) = 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$, ehdokkaat ovat (syksyn kurssin tietojen perusteella) $g_1(0) = \underline{-5}$, $g_1(2) = \underline{-5}$ ja $g_1(1) = \underline{-6}$.

Reunan osa II: $x = 4$ ja $0 \leqslant y \leqslant 2$. Merkitään: $g_2(y) = f(4, y) = -8+y^2-2y$. Koska $g_2'(y) = 2y-2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$, ehdokkaat ovat $g_2(0) = \underline{-8}$, $g_2(2) = \underline{-8}$ ja $g_2(1) = \underline{-9}$.

Reunan osa III: $1 \leqslant x \leqslant 4$ ja $y = 0$. Merkitään: $g_3(x) = f(x, 0) = x^2-6x$. Koska $g_3'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, ehdokkaat ovat $g_3(1) = \underline{-5}$, $g_3(4) = \underline{-8}$ ja $g_3(3) = \underline{-9}$.

Reunan osa IV: $1 \leqslant x \leqslant 4$ ja $y = 2$. Koska $f(x, 2) = x^2 - 6x$, tästä saadaan samat ehdokkaat kuin reunan osasta III.

Kaikista ehdokkaista suurin ja pienin ovat funktion f suurin ja pienin arvo joukossa A: -5 ja -10.

Koska tehtävän funktio on muotoa $h_1(x) + h_2(y)$ ja $A = [1, 4] \times [0, 2]$, sen olisi voinut ratkaista myös seuraavasti. Syksyn kurssin tietoja käyttäen saadaan funktion $h_1(x)$ ääriarvot välillä $[1, 4]$ ja funktion $h_2(y)$ ääriarvot välillä $[0, 2]$. Joukon A ominaisuuden $(x, y) \in A \Leftrightarrow x \in [1, 4]$ ja $y \in [0, 2]$ perusteella niistä voidaan päätellä tehtävän vastaus.

Käydään lopuksi läpi tehtävässä mainittu geometrinen ratkaisu. Neliöksi täydentämällä: $f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 2y = (x-3)^2 + (y-1)^2 - 10$. Koska $(3,1) \in A$, tästä nähdään, että funktion pienin arvo joukossa A on $f(3,1) = -10$. Toisaalta, koska $(x-3)^2 + (y-1)^2$ on pisteiden (x,y) ja $(3,1)$ etäisyyden neliö, saa funktio f suorakaiteessa A suurimman arvonsa sen kulmapisteessä (yhdessä, kahdessa tai kaikissa neljässä). Tämä seuraa siitä, että jos $(x,y) \in A$ ei ole kulmapiste siitä voidaan mennä etäämmälle pisteestä $(3,1)$ jotakin joukon A kulmaa kohti, jolloin $f(x,y)$ kasvaa.

Tehtävän 3 ratkaisu. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 6y/(2+x^2+y^2)$. Jos funktiolla f on suurin tai pienin arvo (avoimessa määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}^2$), ne löytyvät gradientin $\bar{0}$-kohdista (Lause 4.17). Harjoituksen 10 tehtävässä 4 osoitettiin, että funktiolla f on kaksi gradientin $\bar{0}$-kohtaa $(0,-\sqrt{2})$ ja $(0,\sqrt{2})$, joissa f saa arvot $f(0,-\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}/2$ ja $f(0,\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}/2$. Siis jos funktiolla f on pienin ja suurin arvo ne ovat $-3\sqrt{2}/2$ ja $3\sqrt{2}/2$.

Lauseen 4.27 mukaan jatkuva funktio f saa pienimmän ja suurimman arvon jokaisessa epätyhjässä kompaktissa (suljetussa ja rajoitetussa) $\mathbb{R}^2$:n osajoukossa. Lisäksi f saa ne joko gradientin $\bar{0}$-kohdissa tai tarkasteltavan kompaktin joukon reunalla (verkkomonisteen sivu 103). Siksi riittää enää valita kompakti joukko K niin, että $(0,-\sqrt{2}), (0,\sqrt{2}) \in K$, ja että funktion f arvo on helppo arvioida joukon K reunalla ja ulkopuolella olevan välillä $]-3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2[$. Esimerkiksi joukko

$$K = [-3,3] \times [-3,3]$$

kelpaa, sillä sen reunalla ja ulkopuolella pätee:

$$|f(x,y)| = \frac{6|y|}{2+x^2+y^2} < \frac{6M}{M^2} = \frac{6}{M} \leqslant \frac{6}{3} = 2 < \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

missä $M = \max(|x|,|y|) \geqslant 3$.

Mainio valinta joukoksi K on myös kyllin suuri origokeskinen R-säteinen suljettu kuula: $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Tällöin $|f(x,y)|$:n arviointi joukon K reunalla ja ulkopuolella sujuu vaivatta napakoordinaatistoon ($x = r\cos\varphi$ ja $y = r\sin\varphi$) siirtymällä:

$$|f(x,y)| = \frac{6|y|}{2+x^2+y^2} = \frac{6r|\sin\varphi|}{2+r^2} \leqslant \frac{6r}{2+r^2} \leqslant \frac{6r}{r^2} = \frac{6}{r} < \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

kun r on kyllin suuri.

Koska $(0,\sqrt{2}) \in]-\infty,\infty[\times]0,\infty[$, funktion f suurin arvo on tässäkin joukossa $f(0,\sqrt{2})$. Sen sijaan f ei saa pienintä arvoa tässä avoimessa joukossa, koska sillä ei ole toista gradientin $\bar{0}$-kohtaa siinä.

Avoimessa joukossa $]0,\infty[\times]-\infty,\infty[$ funktiolla f ei ole pienintä eikä suurinta arvoa, sillä jos sellainen olisi olemassa se olisi myös lokaali ääriarvokohta, jolloin pätisi $\nabla f(x,y)=\bar{0}$.

Tehtävän 4 ratkaisu. Koska funktio $f(x,y)=2x^2+y+y^2$ on jatkuva, se saa kompaktissa (suljetussa ja rajoitetussa) joukossa $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ suurimman ja pienimmän arvon (Lause 4.27). Koska f on derivoituva, ne saavutetaan joko gradientin $\bar{0}$-kohdissa tai joukon A reunalla.

$$\nabla f(x,y)=\bar{0}\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=0 \\ 1+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Koska $(0,-\frac{1}{2})\in A$, saatiin ehdokas $f(0,-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$.

Vielä on tutkittava joukon A reuna. Käytetään siihen Lagrangen menetelmää. Merkitään $g(x,y)=x^2+y^2-1$, jolloin joukon A reuna on

$$B=\{(x,y)\mid g(x,y)=0\}.$$

Koska f on jatkuva se saa kompaktissa (suljetussa ja rajoitetussa) joukossa B suurimman ja pienimmän arvon. Lagrangen menetelmän (Lauseen 4.36 versio) mukaan nämä ääriarvokohdat löytyvät seuraavien yhtälöryhmien ratkaisuista

$$\begin{cases} \nabla g(x,y)=\bar{0} \\ g(x,y)=0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} \nabla f(x,y)-\lambda\nabla g(x,y)=\bar{0} \text{ jollakin } \lambda\in\mathbb{R} \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

jolla ei ole ratkaisuja. Jälkimmäisestä yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} 4x-\lambda 2x=0 \\ 1+2y-\lambda 2y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(2-\lambda)=0 \\ 1+2(1-\lambda)y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{cases} \text{tai} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ \lambda=\frac{3}{2} \end{cases} \text{tai} \begin{cases} \lambda=2 \\ y=\frac{1}{2} \\ x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}. \end{cases}$$

Siis joukon A reunalta B saatiin ehdokkaat:

$$f(0,-1)=0,\ f(0,1)=2 \text{ ja } f(\pm\sqrt{\tfrac{3}{4}},\tfrac{1}{2})=\tfrac{9}{4}.$$

Kaikista ehdokkaista suurin $\frac{9}{4}$ ja pienin $-\frac{1}{4}$ ovat funktion f suurin ja pienin arvo joukossa A.

Funktion f suurimman ja pienimmän arvon joukon A reunalla B saa selville vaivattomammin seuraavasti. Havaitaan ensin, että

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \text{ ja } y \in [-1, 1].$$

Siksi $f(x, y) = 2x^2 + y + y^2 = 2 - y^2 + y$, kun $(x, y) \in B$, ja riitää selvittää funktion $2 - y^2 + y$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

Tehtävän 5 ratkaisu. Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2$, jolloin $E = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$. Koska funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$, on jatkuva, se saa kompaktissa (suljetussa ja rajoitetussa) joukossa E suurimman ja pienimmän arvon. Lagrangen menetelmän (Lauseen 4.36 versio) mukaan nämä ääriarvokohdat löytyvät seuraavien yhtälöryhmien ratkaisuista

$$\begin{cases} \nabla g(x, y) = \bar{0} \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = \bar{0} \text{ jollakin } \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 2, \end{cases}$$

jolla ei ole ratkaisuja. Jälkimmäisestä yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} y - \lambda 2x = 0 \\ x - \lambda 4y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{2x} = \lambda = \frac{x}{4y} \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y^2 = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2y^2 = x^2 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{tai} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Siis ehdokkaat ovat

$$\begin{aligned} f(-1, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) &= f(1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ ja} \\ f(-1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) &= f(1, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Niinpä funktion f suurin ja pienin arvo joukossa E ovat $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Myös tämä tehtävä voidaan ratkaista tehtävän 4 jälkimmäistä ratkaisutapaa soveltaen eliminoimalla ensin toinen muuttujista yhtälön $x^2 + 2y^2 = 2$ avulla. Esimerkiksi, jos päätetään eliminoida x, saadaan $x = \pm\sqrt{2 - 2y^2}$, $y \in$

$[-1,1]$, ja tehtävä palautuu kahden yhden muuttujan funktion $\pm y\sqrt{2-2y^2}$ suurimpien ja pienimpien arvojen selvittelyyn välillä $[-1,1]$.

Tehtävän 6 ratkaisu. Olkoon $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, jolloin yksikköpallo on $S = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = 0\}$.

Koska funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x-y-z$, on jatkuva, se saa kompaktissa joukossa S suurimman ja pienimmän arvon. Lagrangen menetelmän (Lauseen 4.36 versio) mukaan nämä ääriarvokohdat löytyvät seuraavien yhtälöryhmien ratkaisuista

$$\begin{cases} \nabla g(x,y,z) = \bar{0} \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \text{tai} \begin{cases} \nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla g(x,y,z) = \bar{0} \text{ jollakin } \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \end{cases}$$

jolla ei ole ratkaisuja. Jälkimmäisestä yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} 1-\lambda 2x = 0 \\ -1-\lambda 2y = 0 \\ -1-\lambda 2z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} = -y = -z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 1 \\ y = -x \\ z = -x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases} \text{tai} \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Vertaamalla funktion f arvoja näissä ehdokaspisteissä sen suurimmaksi ja pienimmäksi arvoksi joukossa S havaitaan

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{ja} \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -\sqrt{3}. \end{aligned}$$