Tehtävän 1 ratkaisu. Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^3 + xy$, Hessen matriisi on

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}.$$

Tämän matriisin johtavat alideterminantit ovat

$$d_1(x,y) = 2 \text{ ja } d_2(x,y) = 2 \cdot 6y - 1 \cdot 1 = 12y - 1.$$

Ne ovat positiiviset, kun $y > \frac{1}{12}$. Niinpä Lauseen 3.57(i) perusteella funktion f Hessen matriisi $H(x,y)$ on positiivisesti definiitti joukossa $A = \{(x,y) \mid y > \frac{1}{12}\}$ eli $H(x,y) > 0$ kaikilla $(x,y) \in A$. Koska joukko A on konveksi, seuraa tästä Lauseen 4.12 kohdan (ii) mukaan, että funktio f on vahvasti konveksi A:ssa.

Konveksissa joukossa $B = \{(0,y) \mid y < 0\}$ funktion f rajoittuma on $g(y) = y^3$. Funktio g on vahvasti konkaavi välillä $]-\infty, 0[$ syksyn kurssin Lauseen 6.28 kohdan (iv) perusteella[1], sillä $g''(y) = 6y < 0$ kaikilla $y < 0$. Siksi funktio f on vahvasti konkaavi joukossa B.

Tehtävän 2 ratkaisu. Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$, Hessen matriisi $H(x,y)$ kertaa -1 on

$$\begin{pmatrix} -6x & -3 \\ -3 & -6y \end{pmatrix}.$$

Tämän matriisin johtavat alideterminantit ovat

$$d_1(x,y) = -6x > 0 \text{ ja } d_2(x,y) = 36xy - 9 > 0$$

kaikilla $(x,y) \in A = \{(x,y) \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ja } y < -\frac{1}{2}\}$. Niinpä Lauseen 3.57 kohtien (ii) ja (i) perusteella $H(x,y) < 0$ (eli matriisi $H(x,y)$ on negatiivisesti definiitti) kaikilla $(x,y) \in A$. Edelleen, Lauseen 4.12 kohdan (iv) perusteella funktio f on vahvasti konkaavi joukossa A.

Funktion suurin arvo joukossa A saadaan nyt selville lauseen 4.19 avulla. Enää tarvitsee etsiä joukkoon A kuuluva funktion gradientin $\bar{0}$-kohta:

$$\nabla f(x,y) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-y^2)^2 + y = 0 \\ x = -y^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(y^3 + 1) = 0 \\ x = -y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} y = -1 \\ x = -1. \end{cases}$$

[1] Vaihtoehtoisesti tässä voi soveltaa Lauseen 4.12 kohtaa (iv) ja Lauseen 3.57 kohtia (ii) ja (i) funktion g Hessen matriisiin $H(y) = (6y)$.

Koska funktio f on konkaavi joukossa A, $(-1,-1) \in A$ ja $\nabla f(-1,-1) = \bar{0}$, niin Lauseen 4.19 kohdan (b) perusteella funktion f suurin arvo joukossa A on $f(-1,-1) = -1 + 3 - 1 = 1$.

Tehtävän 3 ratkaisu. Funktion $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$ gradientin $\bar{0}$-kohdat:

$$\begin{cases} y - 3x^2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 12y^2 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} y(1-12y) = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{tai} \begin{cases} y = \frac{1}{12} \\ x = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Siis ehdokkaat lokaaleiksi ääriarvokohdiksi ovat $(0,0)$ ja $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ (Lause 4.17). Tutkitaan näitä ehdokkaita Lauseen 4.24 avulla. Nyt

$$D_f(x,y) = D_{11}f(x,y)D_{22}f(x,y) - \big(D_{12}f(x,y)\big)^2 = 12x - 1.$$

Koska $D_f(0,0) = -1 < 0$, $(0,0)$ ei ole ääriarvokohta. Koska $D_f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = 1 > 0$ ja $D_{11}f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -1 < 0$, $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = \frac{1}{432}$ on lokaali maksimi.

Tehtävän 4 ratkaisu. Funktion $f(x,y) = 6y/(2 + x^2 + y^2)$ gradientin $\bar{0}$-kohdat:

$$\begin{cases} -\frac{12xy}{(2+x^2+y^2)^2} = 0 \\ \frac{6(2+x^2+y^2)-6y(2y)}{(2+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ 2 + x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \text{tai} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Siis ehdokkaat lokaaleiksi ääriarvokohdiksi ovat $(0,\sqrt{2})$ ja $(0,-\sqrt{2})$ (Lause 4.17). Tutkitaan näitä ehdokkaita Lauseen 4.24 avulla. Nyt

$$D_f(x,y) = D_{11}f(x,y)D_{22}f(x,y) - \big(D_{12}f(x,y)\big)^2 =$$
$$-\frac{12y(2+x^2+y^2)^2 - 12xy2(2+x^2+y^2)2x}{(2+x^2+y^2)^4} \cdot \frac{-12y(2+x^2+y^2)^2 - 6(2+x^2-y^2)2(2+x^2+y^2)2y}{(2+x^2+y^2)^4}$$
$$-\Big(-\frac{12x(2+x^2+y^2)^2 - 12xy2(2+x^2+y^2)2y}{(2+x^2+y^2)^4}\Big)^2.$$

Koska $D_f(0,\sqrt{2}) > 0$ ja $D_{11}f(0,\sqrt{2}) < 0$, $f(0,\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ on lokaali maksimi. Koska $D_f(0,-\sqrt{2}) > 0$ ja $D_{11}f(0,\sqrt{2}) > 0$, $f(0,-\sqrt{2}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ on lokaali minimi.

Tehtävän 5 ratkaisu. Funktion $f(x,y) = (x+y)^2 - x^6 - y^6$ gradientin $\bar{0}$-kohdat:

$$\begin{cases} 2(x+y) - 6x^5 = 0 \\ 2(x+y) - 6y^5 = 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2(x+y) - 6x^5 = 0 \\ 6x^5 - 6y^5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x(2-3x^4) = 0 \\ y = x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \\ y = \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}} \\ y = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \end{cases}$$

kohdassa (1) alemmasta yhtälöstä vähennetään ylempi. Siis ehdokkaat lokaaleiksi ääriarvokohdiksi ovat $(0,0)$, $(\sqrt[4]{2/3}, \sqrt[4]{2/3})$ ja $(-\sqrt[4]{2/3}, -\sqrt[4]{2/3})$ (Lause 4.17). Tutkitaan näitä ehdokkaita Lauseen 4.24 avulla. Nyt

$$\begin{aligned} D_f(x,y) &= D_{11}f(x,y)D_{22}f(x,y) - \big(D_{12}f(x,y)\big)^2 \\ &= (2-30x^4)(2-30y^4) - 4. \end{aligned}$$

Koska $D_f(\sqrt[4]{2/3}, \sqrt[4]{2/3}) > 0$ ja $D_{11}f(\sqrt[4]{2/3}, \sqrt[4]{2/3}) < 0$, $f(\sqrt[4]{2/3}, \sqrt[4]{2/3})$ on lokaali maksimi. Samoin nähdään, että $f(-\sqrt[4]{2/3}, -\sqrt[4]{2/3})$ on lokaali maksimi.

Koska $D_f(0,0) = 0$, Lauseesta 4.24 ei voi päätellä onko $(0,0)$ lokaali ääriarvokohta. Tämä tapaus on selvitettävä muilla keinoin. Havaitaan aluksi, että

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(t,t) &= 4t^2 - 2t^6 = 2t^2(2-t^4) > 0, \text{ kun } 0 < |t| < \sqrt[4]{2}, \text{ ja} \\ f(t,-t) &= -2t^6 < 0, \text{ kun } t \neq 0. \end{aligned}$$

Koska pisteen $(0,0)$ jokainen ympäristö sisältää sekä tyyppiä (t,t), $0 < |t| < \sqrt[4]{2}$, että tyyppiä $(t,-t)$, $t \neq 0$, olevia pisteitä seuraa tästä (Määritelmän 4.15 perusteella), ettei $(0,0)$ ole lokaali ääriarvokohta.

Tehtävän 6 ratkaisu. Ehdokkaat funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - x - y - z$ lokaaleiksi ääriarvokohdiksi löytyvät sen gradientin $\bar{0}$-kohdista:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 2y - x - z - 1 = 0 \\ 2z - y - 1 = 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y - x - z = 1 \\ 2z - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -2x + 2y = 1 \\ z = x \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \frac{1}{2}\big(1+y\big) \\ y = 2 \\ z = x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \\ z = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

kohdassa (1) alimmasta yhtälöstä vähennetään ylin ja kohdassa (2) keskimmäiseen yhtälöön lisätään ylin.

Funktion f Hessen matriisi on

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matriisin $H(\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2})$ johtavat alideterminantit ovat positiiviset:

$$\begin{aligned}
d_1 &= 2 > 0, \\
d_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \text{ ja} \\
d_3 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 3 - 2 = 4 > 0.
\end{aligned}$$

Niinpä Lauseen 3.57 kohdan (i) mukaan $H(\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2})$ on positiivisesti definiitti. Edelleen, Lauseen 4.22 perusteella $f(\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}) = -\frac{5}{2}$ on funktion f lokaali minimi.