Tehtävän 1 ratkaisu.

$$\int \tan(2x)dx \overset{(1)}{=} \int \tan(t)\tfrac{1}{2}dt = \tfrac{1}{2}\int \tan(t)dt$$
$$\overset{(2)}{=} \tfrac{1}{2}\big(-\ln|\cos(t)| + C_1\big) = -\tfrac{1}{2}\ln|\cos(2x)| + C,$$

(1) merkitään $2x = t$, jolloin $x = \frac{1}{2}t$ ja $dx = \dfrac{d(\frac{1}{2}t)}{dt}dt = \frac{1}{2}dt$,
katso verkkomonisteen sivulla 7 oleva ”yleisohje”,
(2) Lauseen 1.6 kohta (8),

missä $2x \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$ eli

$$\begin{aligned} x \in \left]-\tfrac{\pi}{4} + n\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{4} + n\tfrac{\pi}{2}\right[&= \left]-\tfrac{\pi}{4} + n\tfrac{2\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4} + n\tfrac{2\pi}{4}\right[\\ &= \left](-1+2n)\tfrac{\pi}{4}, (1+2n)\tfrac{\pi}{4}\right[\end{aligned}$$

jollakin $n \in \mathbb{Z}$. Funktion $\tan(2x)$ integraalifunktioiden (maksimaaliset) määrittelyvälit ovat siis $\left](-1+2n)\frac{\pi}{4}, (1+2n)\frac{\pi}{4}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$. Lisäksi C $(= -\frac{1}{2}C_1)$ on mikä tahansa reaalivakio.

Tehtävän 2 ratkaisu.

$$\begin{array}{r|l} & \ \tfrac{2}{3} \\ \hline 3x+1 & 2x \\ & \underline{2x + \tfrac{2}{3}} \\ & \ -\tfrac{2}{3} \end{array} \qquad \text{siis} \quad \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{3}}{3x+1}$$

ja mm. Lauseen 1.6 kohdan (15) perusteella

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{2x}{3x+1}dx = \int \left(\frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}}{3x+1}\right)dx \\ &= \int \frac{2}{3}dx - \frac{2}{9}\int \frac{D(3x+1)}{3x+1}dx = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\ln|3x+1| + C, \end{aligned}$$

missä määrittelyväli on $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ tai $\left]-\frac{1}{3}, \infty\right[$ ja C on reaalivakio.

Ehdosta $F(0) = 1$ saadaan

$$0 - 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1,$$

joten tämän ehdon toteuttava integraalifunktio on

$$F(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\ln|3x+1| + 1,$$

missä $x \in \left]-\frac{1}{3}, \infty\right[$, sillä vaadittu ehto $F(0) = 1$ on annettu tähän väliin kuuluvassa pisteessä 0.

Tehtävän 3 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ae^{2x}, & \text{kun } x < 0, \text{ ja} \\ \cos ax, & \text{kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Huomataan aluksi, että

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0-} f(x) &= a \text{ ja} \\ \lim_{x \to 0+} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

Siis, jos $a \neq 1$, funktiolla f on hyppyepäjatkuvuuskohta pisteessä 0, eikä se siten voi olla minkään funktion derivaatta syksyn kurssin Huomautuksen 6.12 perusteella. Siksi voidaan olettaa, että $a = 1$ ja riittää selvittää onko f:llä välillä $]-\infty, \infty[$ määriteltyä integraalifunktiota tapauksessa $a = 1$.

Lauseen 1.6 kohtien (16) ja (7) avulla havaitaan, että

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int (D(2x)) e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C,$$

missä $x \in]-\infty, \infty[$, ja

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C_1,$$

missä $x \in]-\infty, \infty[$. Siis, jos funktiolla f on välillä $]-\infty, \infty[$ määriteltyjä integraalifunktioita, ne ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{2x} + C, & \text{kun } x < 0, \text{ ja} \\ \sin x + C_1, & \text{kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Että F voisi olla derivoituva myös pisteessä 0, sen täytyy olla jatkuva tässäkin kohtaa:

$$\lim_{x \to 0-} F(x) = \lim_{x \to 0+} F(x) = F(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = C_1.$$

Niinpä, jos etsittyjä integraalifunktioita on olemassa, ne ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{2x} + C, & \text{kun } x < 0, \text{ ja} \\ \sin x + \dfrac{1}{2} + C, & \text{kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Koska tällaisille funktioille pätee

$$\lim_{x\to 0-} F'(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} F'(x),$$

ne ovat derivoituvuustestin (syksyn kurssin Lause 6.11) perusteella derivoituvia myös pisteessä 0 ja $F'(0) = f(0)$. Siis $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in\,]-\infty, \infty[$. Niinpä etsittyjä integraalifunktioita on olemassa tapauksessa $a = 1$.

Tehtävän 4 ratkaisu. Lauseen 1.6 kohdan (14) perusteella

$$\begin{aligned}\int x^4(2x^5+1)^6 dx &= \frac{1}{10}\int \big(D(2x^5+1)\big)\big(2x^5+1\big)^6 dx\\ = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{7}\big(2x^5+1\big)^7 + C &= \frac{1}{70}\big(2x^5+1\big)^7 + C,\end{aligned}$$

missä määrittelyväli on $]-\infty, \infty[$.

Lauseen 1.6 kohdan (14) perusteella

$$\int \frac{e^{-x}}{2-e^{-x}} dx = \int \frac{D(2-e^{-x})}{2-e^{-x}} dx = \ln|2-e^{-x}| + C,$$

missä määrittelyväli on joko $]-\infty, -\ln 2[$ tai $]-\ln 2, \infty[$.

Tehtävän 5 ratkaisu. Osittaisintegroimalla kolme kertaa peräkkäin ja lopuksi integroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-2x} dx &= x^3(-\frac{1}{2}e^{-2x}) - \int 3x^2(-\frac{1}{2}e^{-2x})dx\\ &= -\frac{1}{2}x^3e^{-2x} + \int 3x^2(\frac{1}{2}e^{-2x})dx\\ &= -\frac{1}{2}x^3e^{-2x} + 3x^2(-\frac{1}{4}e^{-2x}) - \int 6x(-\frac{1}{4}e^{-2x})dx\\ &= -\frac{1}{2}x^3e^{-2x} - \frac{3}{4}x^2e^{-2x} + \int 6x(\frac{1}{4}e^{-2x})dx\\ &= -\frac{1}{2}x^3e^{-2x} - \frac{3}{4}x^2e^{-2x} + 6x(-\frac{1}{8}e^{-2x}) - \int 6(-\frac{1}{8}e^{-2x})dx\\ &= -\frac{1}{2}x^3e^{-2x} - \frac{3}{4}x^2e^{-2x} - \frac{3}{4}xe^{-2x} + \int \frac{3}{4}e^{-2x}dx\\ &= -\frac{1}{2}x^3e^{-2x} - \frac{3}{4}x^2e^{-2x} - \frac{3}{4}xe^{-2x} - \frac{3}{8}e^{-2x} + C,\end{aligned}$$

missä $x \in\,]-\infty, \infty[$.

Tehtävän 6 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \overline{\text{arc}}\tan x - \overline{\text{arc}}\tan \frac{1+x}{1-x}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} D\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(1-2x+x^2)+(1+2x+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \end{aligned}$$

missä $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Koska $f'(x) = 0$ välillä $]-\infty, 1[$, niin integraalilaskennan peruslauseen (syksyn kurssin Lause 6.14) mukaan f on vakio C_1 tällä välillä. Samasta syystä f on vakio C_2 välillä $]1, \infty[$. Lisäksi havaitaan, että

$$\begin{aligned} C_1 &= f(0) = \overline{\text{arc}}\tan 0 - \overline{\text{arc}}\tan 1 = -\frac{\pi}{4} \quad \text{ja} \\ C_2 &= \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \overline{\text{arc}}\tan x - \overline{\text{arc}}\tan(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Siis

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & \text{kun } x < 1, \text{ ja} \\ \dfrac{3\pi}{4}, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$