Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Harjoitus 9, 5.4.2013

1. Osoita, että yhtälöstä $f(x, y) = x\sqrt{1 + 3x^2y^3} + 2x^5y^4 = 4$ voidaan pisteen$(1, 1)$ ympäristössä ratkaista muuttuja y muuttujan x funktiona. Määritä derivaatta $y'(1)$.

2. Laske yhtälöstä $e^{2x}y^2z + z\ln y = 1$ määräytyvän implisiittifunktion $y(x, z)$ osittaisderivaatat xz-tason pisteessä $(0, 1)$. (Neuvo: Ensin on keksittävä $y(0, 1)$:n arvo sijoittamalla $x = 0, z = 1$, jolloin on ratkaistava yhtälö $y^2 + \ln y = 1$. Varmista laskussa myös implisiittifunktion olemassaolo ja se, että tällaisia implisiittifunktioita on vain yksi.)

3. Anna neliömuotoon Q liittyvä symmetrinen matriisi A ja kirjoita Q sen avulla matriisikertolaskua käyttäen, kun

   $$Q(x, y, z, u) = -x^2 - z^2 - 2xy + 2y^2 + 10xz + 6xu - 4yu + 6uz + 3u^2.$$

   Muuta matriisin A lukuja a_{13} ja a_{31} niin, että sama matriisikertolaskun tulos pätee myös näin epäsymmetriseksi muutetulle A. Mikä ehto summan $a_{13} + a_{31}$ tulee täyttää, jotta näin kävisi?

4. Tutki seuraavien neliömuotojen definiittisyyttä:
   a) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz$
   b) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$
   c) $Q(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$.

5. Osoita funktio $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 + z^2$ vahvasti konveksiksi $\mathbb{R}^3$:ssa.

6. Osoita, ettei funktio $f(x, y, z) = 2x^2 + 10y^2 - z^2$ ole konveksi eikä konkaavi minkään $\mathbb{R}^3$:n pisteen missään ympäristössä. (Neuvo: tarkastele funktiota sopivilla pisteen kautta kulkevilla suorilla.)