

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Harjoitus 8, 22.3.2013

1. Määritä funktion $f(x, y) = 4x^2y^3 + x + 2y + \sqrt{1 + xy}$ suunnattu derivaatta origossa vektorin $(2, -1)$ suuntaan. Mihin suuntaan f kasvaa nopeimmin origossa?

2. Määritä ellipsoidin

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 3$$

pisteeseen $(3, -2, 5)$ liittyvän tangenttitason yhtälö.

3. Mikä vaakasuora taso (eli taso, jonka yhtälö on muotoa $z = a$, a vakio) on pinnan

$$z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$$

eräs tangenttitaso? Missä pinnan pisteessä sivuaminen tapahtuu?

4. Osoita funktio $f(x, y) = \sqrt{1 + x^4 + y^2}$ differentioituvaksi koko tasossa \mathbb{R}^2 . Muodosta f :n kokonaisdifferentiaali ja osittaisdifferentiaalit pisteessä $(1, 1)$. Arvioi kokonaisdifferentiaalin avulla erotuksia $f(1, 1) - f(0.99, 1.01)$ ja $f(1, 1) - f(0.999, 1.001)$. Vertaile arvioiden suhteellisia virheitä laskimen avulla. (Tässä suhteellinen virhe = virhe jaettuna muutosvektorin pituudella.)

5. Määritä funktion $f(x, y, z, u) = 2x^2 + u^2 + yz + xyzu$ gradientti, kokonaisdifferentiaali ja Hessen matriisi pisteessä $(2, 1, -1, 1)$.

6. Osoita, että funktio $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ on harmoninen eli ts. se toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $D_{11}f + D_{22}f + D_{33}f = 0$.