

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin jatkokurssi
Harjoitus 5, 22.2.2013

1. Olkoon $f(x, y) = 2x + y$ ja $\varepsilon > 0$. Etsi sellainen neliön $T = [0,1] \times [0,1]$ jako D , että f :n ylä- ja alasummien erotus toteuttaa ehdon $S_D - s_D < \varepsilon$. Laske tasointegraali $\int_T f$ yläsumman tai alasumman raja-arvona, kun jako D tihenee. (Neuvo: yksinkertaisinta lienee jakaa T n^2 osaneliöön. Ole hyvin huolellinen syntyvien sinänsä melko yksinkertaisten kaksoissummien käsittelyssä, koska niissä tekee helposti laskuvirheitä!)
2. Laske tehtävän 1 tilanteessa $\int_T f$ myös iteroituna integraalina. Tarkista tuloksesi vielä yhdellä tavalla käyttämällä hyväksi tulkintaa, jonka mukaan tasointegraali on integroitavan funktion keskiarvo kertaa integroimisjoukon pinta-ala.
3. Laske tasointegraali $\int \int_A xy dx dy$, kun

$$A = \{(x, y) | 0 \leq x, 0 \leq y, 2x + y \leq 2\}.$$

4. Laske integroimalla kolmion ABC keskiön koordinaatit, kun kärjet ovat $A = (1, 0)$, $B = (5, 7)$, $C = (0, 3)$.
5. Laske napakoordinaatteihin siirtymällä $\int \int_A y^2 dx dy$, kun

$$A = \{(x, y) | 0 \leq x, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

6. Määritä edellisen tehtävän joukon A keskiön koordinaatit.