MIKSI π ON IRRATIONAALINEN?

Tämän tehtäväsarjan ajatus on osoittaa, että luku π on irrationaalinen. Tämä siis tarkoittaa sitä, että sitä ei voida kirjoittaa muodossa $\frac{r}{s}$ joillakin kokonaisluvuilla r ja s. Aloitetaan todistus vastaoletuksella: $\pi = \frac{r}{s}$, missä r ja s ovat positiivisia kokonaislukuja. Määritellään vielä

$$f(x) = x^n(r - sx)^n.$$

(1) Osoita, että

$$0 < \int_0^{r/s} x^n(r-sx)^n \sin x dx \le \frac{r}{s}\left(\frac{r^2}{4s}\right)^n < r^{2n+1}.$$

(Vihje: Laske integroitavan otuksen maksimi integrointivälillä. MIkäli vastaoletus on tosi, on nimittäin tilanne niin onnellinen, että funktioiden $\sin x$ ja $x(r - sx)$ maksimit ovat samassa pisteessä.)

(2) Osoita, että

$$\int f(x)\sin x dx = -f(x)\cos x + f'(x)\sin x + f''(x)\cos x - f'''(x)\sin x - \dots$$

(3) Käytä edellisen tehtävän tulosta ja hankkiudu eroon parittomista derivaatoista osoittaaksesi, että

$$\int_0^{r/s} f(x)\sin x dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(f^{(2k)}\left(\frac{r}{s}\right) + f^{(2k)}(0)\right) = \sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k f^{(2k)}(0)$$

(4) Osoita, että $f^{(j)}(0) = 0$, kun $j < n$. (Vihje: Minkälainen polynomi on $x^n(r - sx)^n$?

(5) Osoita, että $n! \mid f^{(j)}(0)$, kun $j \ge n$, ja totea tämän avulla, että

$$n! \mid \sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k f^{(2k)}(0) = \int_0^{r/s} x^n(r-sx)^n \sin x dx.$$

(6) Osoita, että $r^{2n+1} < n!$, kun n iso ja johda ristiriita. (Vihje: Logaritmien ottaminen puolittain ja summan arvioiminen integroiden voi tuottaa iloa. Vaihtoehtoisesti voi käyttää myös Stirlingin kaavaa.)