

# LUKUTEORIAN ALKEET

## 2. LASKUHARJOITUKSET

Koska monisteen huolimaton heitto "On helppo nähdä, että tekijä-funktioiden pätevät seuraavat kaavat" on ilmeisesti herättänyt hämmennystä, käydään nyt tehtävissä 1 ja 2 funktion  $\sigma$  kaavan todistus läpi. Monisteessa väitetään siis, että

$$\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{j=1}^k \frac{p_j^{\alpha_j+1} - 1}{p_j - 1}.$$

kun  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$  on luvun alkutekijähajotelma. Kukin tekijä lasketaan vain kertaalleen, eli esimerkiksi luvun 8 tekijät ovat 1, 2, 4, 8.

- (1) Todista, että  $\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$ , kun  $p$  on alkuluku ja  $k$  positiivinen kokonaisluku. (Vihje: Tähän on monta tapaa, voit käyttää induktiota tai geometrisen jonon summakaavaa, tai mitä parhaaksi näet. Pohdi aluksi, mitkä ovat luvun  $p^k$  tekijät.)
- (2) Yleistetään nyt edelläoleva usealle alkuluvulle. Perustele ensin, miksi

$$\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq \alpha_1 \\ 0 \leq j_2 \leq \alpha_2 \\ \dots \\ 0 \leq j_k \leq \alpha_k}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k}.$$

Muuta tämän jälkeen summausjärjestys niin, että saat eroteltua jokaista alkulukua vastaavan summan, ja käytä tämän jälkeen joko kohtaa 1 tai geometrisen jonon summakaavaa viimeistelläksesi todistus.

- (3) Ratkaise Diofantoksen yhtälö  $5x + 3y = 2$ .
- (4) Määritä  $\text{syT}(72, 56)$  ja ratkaise Diofantoksen yhtälö  $72x - 56y = 8$ .
- (5) Ratkaise Diofantoksen yhtälö  $72x - 56y = 7$ .
- (6) Herra R.G. ostaa kahvia alennusmyynnistä. Koska hänen kahvinkulutuksensa on valtava, arvioi hän, että vähintään 24 pakettia on kahvia ostettava. Tarjouksessa ovat kahvilajikkeet maksavat 3 euroa ja 5 euroa pakkausta kohti, ja hän haluaa käyttää kahviostoksiinsa täsmälleen 100 euroa. Koska kalliimpi kahvilajike on hänen suosikkinsa, haluaa hän ostaa 5 euroa maksavaa vähintään yhtä monta pakettia kuin 3 euroa maksavaa. Kuinka monta pakettia kumpaakin kahvilajiketta hän tulee raahaamaan kaupasta kotiin?