Lukuteorian alkeet
Toisten harjoitusten ratkaisuita

1. Todista, että $\sigma\big(p^k\big) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$, kun p on alkuluku ja k positiivinen kokonaisluku.

Ratkaisu. Luvun p^k tekijät ovat $1,\ p,\ p^2,\ \ldots,\ p^k$. (Tämän toteaminen edellyttää yksikäsitteisen tekijöihinjaon, tai oleellisesti ottaen yhtä vahvan lemman 17, käyttämistä: Jos d on luvun p^k tekijä, ja q on luvun d alkutekijä, niin $q \mid p^k$. Lemman 17 nojalla siis $q \mid p$ ja on oltava $q = p$, eli d on luvun p potenssi.)

Nyt tekijöiden summan voi laskea esimerkiksi seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}(p-1)\,\sigma\big(p^k\big) &= (p-1)\,\big(p^k + p^{k-1} + \ldots + p^2 + p + 1\big)\\ &= p^{k+1} + p^k + p^{k-1} + \ldots + p^2 + p\\ &\qquad - p^k - p^{k-1} - \ldots - p^2 - p - 1 = p^{k+1} - 1.\end{aligned}$$

2. Yleistetään nyt edelläoleva usealle alkuluvulle. Perustele ensin, miksi

$$\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \sum_{\substack{0 \leqslant j_1 \leqslant \alpha_1 \\ 0 \leqslant j_2 \leqslant \alpha_2 \\ \cdots \\ 0 \leqslant j_k \leqslant \alpha_k}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k}.$$

Muuta tämän jälkeen summausjärjestys niin, että saat eroteltua jokaista alkulukua vastaavan summan, ja käytä tämän jälkeen joko kohtaa 1 tai geometrisen jonon summakaavaa viimeistelläksesi todistus.

Ratkaisu. Epäilemättä jokainen yhteenlaskettava on luvun $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ tekijä, sillä onhan osamäärä

$$\frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}}{p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k}} = p_1^{\alpha_1 - j_1} p_2^{\alpha_2 - j_2} \cdots p_k^{\alpha_k - j_k}$$

kokonaisluku. Toisaalta, yksikäsitteisen tekijöihinjaon nojalla muita tekijöitä ei ole.

Erotetaan tekijöiden summasta ensin ulos pelkästään luvuista p_k ja α_k riippuva tekijä, sitten vain luvuista p_{k-1} ja α_{k-1} riippuvat tekijät, ja jatketaan samalla tavalla:

$$\begin{aligned}\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{j_{k-2}=0}^{\alpha_{k-2}} \sum_{j_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} \sum_{j_k=0}^{\alpha_k} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k}\\ &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{j_{k-2}=0}^{\alpha_{k-2}} \sum_{j_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_{k-1}^{j_{k-1}} \sum_{j_k=0}^{\alpha_k} p_k^{j_k}\\ &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{j_{k-2}=0}^{\alpha_{k-2}} \sum_{j_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_{k-1}^{j_{k-1}} \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}\\ &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{j_{k-2}=0}^{\alpha_{k-2}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_{k-2}^{j_{k-2}} \sum_{j_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_{k-1}^{j_{k-1}} \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}\\ &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{j_{k-2}=0}^{\alpha_{k-2}} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_{k-2}^{j_{k-2}} \cdot \frac{p_{k-1}^{\alpha_{k-1}+1} - 1}{p_k - 1} \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}\\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_{k-1}^{\alpha_{k-1}+1} - 1}{p_{k-1} - 1} \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.\end{aligned}$$

3. Ratkaise Diofantoksen yhtälö $5x + 3y = 2$.

Ratkaisu. Yhtälölle löytää helposti erityisratkaisun $x = 1$, $y = -1$; onhan $5-3 = 2$. Jos x' ja y' ovat toinen kokonaislukuratkaisu, eli niille pätee $5x'+3y' = 2$, niin näiden kahden ratkaisun erotus $\xi = x' - x$, $\eta = y' - y$ ratkaisee yhtälön $5\xi + 3\eta = 0$. Nyt $5\xi = -3\eta$, eli ξ on jaollinen kolmella ja η jaollinen viidellä, eli $\xi = 3k$ ja $\eta = 5\ell$ joillakin kokonaisluvuilla k ja ℓ. Koska on oltava $5 \cdot 3k = -3 \cdot 5\ell$, on $k = -\ell$. Täten jokainen ratkaisu x', y' on muotoa

$$x' = 1 + 3k, \quad y' = -1 - 5k,$$

jollakin kokonaisluvulla k. Toisaalta, nämä ovat kaikki ratkaisuita:

$$5\,(1 + 3k) + 3\,(-1 - 5k) = 5 + 15k - 3 - 15k = 2.$$

4. Määritä $\mathrm{syt}(72, 56)$ ja ratkaise Diofantoksen yhtälö $72x - 56y = 8$.

Ratkaisu. Käytetään Eukleideen algoritmia:

$$72 = 1 \cdot 56 + 16, \qquad 56 = 3 \cdot 16 + 8, \qquad 16 = 2 \cdot 8.$$

Kysytty suurin yhteinen tekijä on viimeinen nollasta poikkeava jakojäännös, eli 8.

Diofantoksen yhtälölle saa erityisratkaisun takaisinsijoituksilla yllä mainituista jakoyhtälöistä:

$$8 = 56 - 3 \cdot 16 = 56 - 3 \cdot (72 - 1 \cdot 56) = 4 \cdot 56 - 3 \cdot 72.$$

Yleinen ratkaisu on lauseiden 14 ja 15 mukaisesti

$$x = -3 + \frac{56t}{8} = -3 + 7t, \qquad y = -4 + \frac{72t}{8} = -4 + 9t,$$

missä t on mielivaltainen kokonaisluku.

5. Ratkaise Diofantoksen yhtälö $72x - 56y = 7$.

Ratkaisu. Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisuita, sillä vasen puoli on aina parillinen, mutta oikea puoli pariton.

6. Herra R. G. ostaa kahvia alennusmyynnistä. Koska hänen kahvinkulutuksensa on valtava, arvioi hän, että vähintään 24 pakettia on kahvia ostettava. Tarjouksessa olevat kahvilajikkeet maksavat 3 euroa ja 5 euroa pakkausta kohti, ja hän haluaa käyttää kahviostoksiinsa täsmälleen 100 euroa. Koska kalliimpi kahvilajike on hänen suosikkinsa, haluaa hän ostaa 5 euroa maksavaa vähintään yhtä monta pakettia kuin 3 euroa maksavaa. Kuinka monta pakettia kumpaakin kahvilajiketta hän tulee raahaamaan kaupasta kotiin?

Ratkaisu. Ostakoon Herra R. G. x kalliimpaa ja y halvempaa kahvipakettia. Tällöin siis x ja y ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, $x + y \geqslant 24$, $x \geqslant y$ ja erityisesti $5x + 3y = 100$.

Viimeisen yhtälön voi kirjoittaa muodossa $3y = 5\,(20 - x)$. Nyt lauseen 17 nojalla on luvun y oltava jaollinen viidellä ja erotuksen $20 - x$ oltava jaollinen kolmella.

Koska $x \geqslant y$ ja $x + y \geqslant 24$ on

$$2x \geqslant x + y \geqslant 24, \quad \text{eli} \quad x \geqslant 12.$$

Toisaalta, $x \leqslant 20$, koska muuten kahvipakettien yhteishinta olisi suurempi kuin $20 \cdot 5 = 100$. Luvun x mahdollisista arvoista 12, 13, ..., 20 ne, joille $20 - x$ on jaollinen kolmella, ovat 14, 17 ja 20. Käymme nämä tapaukset erikseen läpi.

Arvo $x = 20$ ei käy, koska silloin olisi $3y = 100 - 5x = 100 - 5 \cdot 20 = 0$, eli $y = 0$ ja kahvipaketteja olisi vain 20 kappaletta.

Arvo $x = 17$ ei niin ikään käy, koska silloin olisi $3y = 100 - 5x = 100 - 85 = 15$, eli olisi $y = 5$, ja kahvipaketteja olisi myöskin liian vähän.

Viimeinen mahdollisuus $x = 14$ pelastaa Herra R. G.:n päivän, sillä sillä arvolla on oltava $3y = 100 - 5 \cdot 14 = 30$, eli $y = 10$, ja näillä arvoilla kaikki Herra R. G.:n toiveet toteutuvat.