Johdatus lukuteoriaan
Ensimmäisten harjoitusten ratkaisuita

Luonnollisesti tehtävän voi yleensä ratkaista monella eri tavalla, mutta seuraavassa kukin tehtävä on ratkaistu vain yhdellä, joka ei välttämättä suinkaan ole yksinkertaisin tai elegantein.

1. Etsi Erastostheneen seulan avulla lukua 123 pienemmät alkuluvut.

Ratkaisu. Koska jokaisella yhdistetyllä luonnollisella luvulla n on alkutekijä p, jolle $p \leqslant \sqrt{n}$, riittää poistaa niiden alkulukujen p monikerrat, joille pätee $p \leqslant \sqrt{123} < \sqrt{144} = 12$, eli $p \leqslant 11$. Aloitamme vähentämällä parilliset luvut:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~
29	~~30~~	31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~	51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~
57	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~	81	~~82~~	83	~~84~~
85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~	91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~
99	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	105	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~	111	~~112~~
113	~~114~~	115	~~116~~	117	~~118~~	119	~~120~~	121	~~122~~	123			

Seuraavaksi vuorossa kolmella jaolliset:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~
29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~
~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~
~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~	~~111~~	~~112~~
113	~~114~~	115	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~	121	~~122~~	~~123~~			

Sitten viidellä jaolliset:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~
29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~
~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~
~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~	~~111~~	~~112~~
113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~	121	~~122~~	~~123~~			

Seuraavana vuorossa seitsemällä jaolliset luvut:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~
29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~
~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~
~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~	~~111~~	~~112~~
113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~	121	~~122~~	~~123~~			

Ja nyt seuraava alkuluku onkin jo 11, ja riittää enään poistaa sillä jaolliset luvut:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~
29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~
~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~
~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~	~~111~~	~~112~~
113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~	~~121~~	~~122~~	~~123~~			

Alkulukujen listaksi saadaan siis:

	2	3		5		7				11		13	
		17		19				23					
29		31						37				41	
43				47						53			
		59		61						67			
71		73						79				83	
				89								97	
		101		103				107		109			
113													

2. Laske luvun 30 positiivisten tekijöiden määrä ja summa sekä manuaalisesti (etsien käsin kaikki tekijät) että suoraan tekijäfunktioiden avulla.

Ratkaisu. Suurin luvun 30 tekijä on tietenkin luku 30 itse. Seuraavaksi suurin tekijä on enintään $\frac{30}{2} = 15$. Tarkastellaan siis jaollisuutta enintään tämän suuruisilla luvuilla:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{30} = \mathbf{30} \cdot \mathbf{1}, & \mathbf{30} = \mathbf{5} \cdot \mathbf{6}, & 30 = 2 \cdot 11 + 8, \\
\mathbf{30} = \mathbf{15} \cdot \mathbf{2}, & 30 = 4 \cdot 7 + 2, & 30 = 2 \cdot 12 + 6, \\
\mathbf{30} = \mathbf{10} \cdot \mathbf{3}, & 30 = 3 \cdot 8 + 6, & 30 = 2 \cdot 13 + 4, \\
30 = 7 \cdot 4 + 2, & 30 = 3 \cdot 9 + 3, & 30 = 2 \cdot 14 + 2, \\
\mathbf{30} = \mathbf{6} \cdot \mathbf{5}, & \mathbf{30} = \mathbf{3} \cdot \mathbf{10}, & \mathbf{30} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{15}.
\end{array}$$

Luvun 30 tekijät ovat siis 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ja 30, joita on siis kahdeksan kappaletta. Näiden tekijöiden summa on

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 = 11 + 16 + 45 = 27 + 45 = 72.$$

Toisaalta luvun 30 alkutekijähajotelma on $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, eli sen tekijöiden lukumäärä on

$$(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8,$$

ja sen tekijöiden summa on

$$\frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = (1 + 2) \cdot (1 + 3) \cdot (1 + 5) = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 3 \cdot 24 = 72.$$

3. Olkoon k pariton luku. Osoita, että $k^2 - 1$ on jaollinen kahdeksalla.

Ratkaisu. Koska luku k on pariton, ovat luvut $k+1$ ja $k-1$ parillisia. Voidaan siis kirjoittaa $k - 1 = 2a$ ja $k + 1 = 2a + 2 = 2(a + 1)$ jollakin kokonaisluvulla a. Toisaalta, varmasti toinen luvuista a ja $a+1$ on parillinen, eli $a(a+1)$ on parillinen ja voidaan kirjoittaa $a(a + 1) = 2b$ jollakin kokonaisluvulla b. Yhdistämällä nämä havainnot saadaan:

$$k^2 - 1 = (k - 1)\,(k + 1) = 2a \cdot 2(a + 1) = 4 \cdot 2b = 8b,$$

ja täten luku $k^2 - 1$ on kahdeksalla jaollinen.

4. Olkoon k luku, joka ei ole jaollinen kolmella. Osoita, että k^2-1 on jaollinen kolmella. Milloin se on jaollinen yhdeksällä?

Ratkaisu. Kolmesta peräkkäisestä luvusta $k-1$, k ja $k+1$ täsmälleen yksi on välttämättä jaollinen kolmella. Se ei ole k, eli täsmälleen yksi luvuista $k+1$ ja $k-1$ on kolmella jaollinen. Täten $k^2-1=(k+1)(k-1)$ on varmasti kolmella jaollinen.

Luku $k^2-1=(k+1)(k-1)$ on yhdeksällä jaollinen täsmälleen silloin kun oikean puolen kolmella jaollinen tekijä (ja vain toinen tekijöistä on jaollinen kolmella) on jaollinen myös yhdeksällä, eli kun luvuista $k+1$ ja $k-1$ toinen on jaollinen yhdeksällä.

5. Osoita, että jos luku 2^p-1 on alkuluku, niin $2^{p-1}(2^p-1)$ on täydellinen luku.

Ratkaisu. Luvun $2^{p-1}(2^p-1)$ tekijöihinjako on tiedossa. Katsotaan, mitä tapahtuu kun sen sijoittaa luennoissa mainittuun tekijöiden summan lausekkeeseen:

$$\begin{aligned}\sigma\big(2^{p-1}(2^p-1)\big) &= \frac{(2^p-1)^2-1}{2^p-1-1}\cdot\frac{2^{p-1+1}-1}{2-1} = \frac{2^{2p}-2\cdot 2^p+1-1}{2^p-2}\cdot(2^p-1)\\ &= \frac{2^p(2^p-2)}{2^p-2}\cdot(2^p-1) = 2^p(2^p-1) = 2\cdot 2^{p-1}(2^p-1)\,.\end{aligned}$$

Kyseisen luvun positiivisten tekijöiden summa on siis kaksi kertaa luku itse, niin kuin pitikin.

6. Pikku-Kalle on vakuuttunut, että erään neliön tekijöiden lukumäärä on 16. Miksi voit olla varma, että hän on väärässä?

Ratkaisu. Olkoon kyseinen neliöluku n^2, missä n on positiivinen kokonaisluku. Koska luvun 1 tekijöiden lukumäärä on vain 1, on epäilemättä oltava $n>1$.

Olkoon luvulla n alkutekijähajotelma $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, missä siis k on positiivinen kokonaisluku, luvut a_1, a_2, …, a_k ovat positiivisia kokonaislukuja, ja luvut p_1, p_2, …, p_k ovat pareittain erisuuria alkulukuja. Nyt neliöllä n^2 on alkutekijähajotelma $p_1^{2a_1}p_2^{2a_2}\cdots p_k^{2a_k}$, ja sen tekijöiden lukumäärän lausekkeessa

$$(2a_1+1)(2a_2+1)\cdots(2a_k+1)$$

on jokainen tekijä pariton. Siis neliöluvun tekijöiden lukumäärä on aina pariton, eikä siis koskaan 16.