BERTRANDIN POSTULAATIN TODISTUS

Bertrandin postulaatin mukaan lukujen n ja $2n$ välissä on alkuluku, kun $n \geq 2$. Seuraavien tehtävien tarkoitus on todistaa väittämä alkeellisella tavalla.

(1) Todista, että jos välillä $]k, 2k]$ on alkuluku, niin se jakaa luvun $\binom{2k}{k}$.

(2) Todista, että $\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{2n+1}$ ja $\binom{2m+1}{m+1} < 2^{2m}$

(3) Todista, että

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ alkuluku}}} p < 4^{n-1}.$$

Vihje: Induktio on iloinen asia. Kun siirryt induktiossa luvusta m lukuun $m+1$, on käytännössä kaksi vaihtoehtoa: $m+1$ ei ole alkuluku, jolloin elämä on helppoa, tai se on alkuluku, jolloin iloa tuottaa induktio-oletuksen käyttö luvulle $\frac{m+1}{2}$ voi tuottaa iloa yhdistettynä kahden ensimmäisen tehtävän tuloksiin,

(4) Osoita, että $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ tai 1.

(5) Osoita, että alkuluku p jakaa luvun $\binom{2n}{n}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

kertaa, ja arvioi tälle summalle yläraja $\leq \log_p 2n$. Osoita lisäksi, että mikäli $\frac{2}{3}n < p \leq n$, niin alkuluku p ei jaa lukua $\binom{2n}{n}$ kertaakaan, ja jos taas $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n$, niin alkuluku p jakaa luvun $\binom{2n}{n}$ korkeintaan kerran.

(6) Viimeistele todistus: Tee vastaoletus, että välillä $]n, 2n]$ ei ole alkulukuja. Vertaile nyt tehtävässä 2 todistamaasi rajaa luvulle $\binom{2n}{n}$ rajaan, jonka saat kirjoittamalla luvun $\binom{2n}{n}$ alkutekijähajotelmana ja huomioimalla eksponenteille ehdot, jotka olet todistanut edellisissä tehtävissä. Johda ristiriita ja käsittele tarpeen tullen erikoistapaukset (eli pienet n).