2.9 Axiom och teorier

I avsnitt 2.5 definierade vi predikat och relationer inom en modell. Ett besläktat fenomen är då vi använder mängder av predikatlogiska satser, *teorier*, för att beskriva klasser av modeller. I det här avsnittet definierar vi vad en teori är och ger enkla exempel på teorier.

Definition 69. Låt L vara ett lexikon. En *(L)-teori* T är en mängd L-satser. Elementen i T är teorins *axiom*. Om $\mathcal{M}$ är en L-modell så att $\mathcal{M} \models A$ för alla $A \in T$ så är $\mathcal{M}$ en *modell för* T. Om en sats B är härledbar ur T så är B ett teorem i T.

Exempel 70. Lexikonet för grafer består av en tvåställig relationssymbol, oftast E. En graf är en binär relation som är symmetrisk och irreflexiv. Axiomen för grafer är

1. $\forall x \forall y (xEy \to yEx)$ (symmetri)
2. $\forall x \neg xEx$ (irrreflexivitet)

En modell är alltså en graf om och endast om den satisfierar axiomen ovan.

Ett exempel på ett teorem i grafteorin är $\forall x \forall y (xEy \to \neg x = y)$ (som är ett annat sätt att uttrycka irreflexiviteten).

Exempel 71. Ett annat bekant exempel är axiomen för en linjär ordning (med lexikonet $L = \{<\}$):

1. $\forall x \neg x < x$ (irreflexivitet)
2. $\forall x \forall y \forall z ((x < y \land y < z) \to x < z)$ (transitivitet)
3. $\forall x \forall y (x < y \lor y < x \lor x = y)$ (totalitet)

Exempel på linjära ordningar är de naturliga talen eller de reella talen med sin naturliga ordning “mindre än”.

Exempel på teorem i teorin är: $\forall x \forall y (x < y \to \neg y < x)$ och $\forall x \forall y \forall z (x < y \to (x < z \lor z < y))$.

Exempel 72. Vi har givit *identitetsymbolen* $=$ en speciell roll: den tolkas i varje modell $\mathcal{M}$ som den riktiga identiteten

$$=^{\mathcal{M}} = \{(a, a) \mid a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})\}.$$

Dethär bruket styrs av att vi i all tysthet antagit att alla modeller vi granskar är modeller för *identitetsaxiomen*:

1. $\forall x \; x = x$
2. $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$
3. $\forall x \forall y \forall z ((x = y \land y = z) \to x = z)$
4. $\forall x \forall y ((x = y \land P_n(x)) \to P_n(y))$
5. $\forall x \forall x' \forall y \forall y' ((x = y \land x' = y' \land R_n(x, x')) \to R_n(y, y'))$

Exempel på teorem i teorin för identitet är $\forall x \exists y \; x = y$ och $\exists x \forall y \; x = y \to \forall x \forall y \; x = y$.

Då vi härleder satser med identiteter innebär vårt tysta antagande att alla modeller satisfierar identitetsaxiomen att vi får använda dem som premisser i härledningen. Så kan vi t.ex. härleda $\forall x P_0(x)$ från formlerna $\forall x \; x = c$ och $P_0(c)$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \forall y((x = y \wedge P_0(x)) \to P_0(y))}{\forall y((c = y \wedge P_0(c)) \to P_0(y))}\,\forall\text{ E}}{(c = x \wedge P_0(c)) \to P_0(x)}\,\forall\text{ E} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \forall y(x = y \to y = x)}{\forall y(x = y \to y = x)}\,\forall\text{ E}}{x = c \to c = x}\,\forall\text{ E} \qquad \dfrac{\forall x\ x = c}{x = c}\,\forall\text{ E}}{c = x}\,\to\text{ E} \qquad P_0(c)}{c = x \wedge P_0(c)}\,\wedge\text{ I}}{P_0(x)}\,\to\text{ E}}{\forall x P_0(x)}\,\forall\text{ I, obs}
$$

obs: x förekommer inte fri i någon premiss

Exempel 73. För varje $n \in \mathbb{N}$ kan vi uttrycka att en modell har högst n element med axiomet:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y(y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n).$$

Inom första ordningens logik kan vi emellertid inte uttrycka att modellens domän är ändligt. Dethär bevisas t.ex. på kursen i matematisk logik och grundkursen i modellteori.