2.8 Sundhet

Nästa steg är att bevisa sundhetsteoremet för naturlig deduktion inom predikatlogiken. Vi har fyra nya regler så vi har alldeles nya bitar som vi måste visa är sunda. Men vi måste också gå igenom de gamla reglerna, eftersom våra formler och vår definition av sanning avviker från satslogikens. Vi kallar en deduktion inom predikatlogiken *sund* om slutsatsen av deduktionen är en logisk konsekvens av premisserna, dvs. varje modell och tolkning som satisfierar premisserna satisfierar slutsatsen.

Teorem 66 (Predikatlogikens sundhetsteorem). *Låt L vara ett lexikon. Om $\mathcal{S}$ är en mängd L-formler, A en L-formel och $S \vdash A$ så är A en logisk konsekvens av $\mathcal{S}$.*

Bevis. Vi bevisar teoremet med induktion över strukturen av naturliga deduktioner.

1. Om $\mathcal{P}$ är den triviala deduktionen A så är A en premiss. Således om $\mathcal{M}$ och s satisfierar premisserna till $\mathcal{P}$ så gäller $\mathcal{M} \models_s A$.

2. Antag som induktionshypotes att deduktionerna $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ och $\begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}$ är sunda. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$. Låt vidare $\mathcal{M}$ vara en L-modell och s en $\mathcal{M}$-tolkning så att $\mathcal{M} \models_s C$ för varje premiss C i $\mathcal{R}$. Eftersom premisserna i $\mathcal{P}$ och $\mathcal{Q}$ är premisser i $\mathcal{R}$ och $\mathcal{P}$ och $\mathcal{Q}$ är sunda måste vi ha $\mathcal{M} \models_s A$ och $\mathcal{M} \models_s B$. Enligt Tarskis sanningsdefinition gäller då $\mathcal{M} \models_s A \wedge B$. Således är $A \wedge B$ är en logisk konsekvens av premisserna till $\mathcal{R}$.

3.-11. De övriga reglerna för konnektiven bevisas genom motsvarande modifikation av bevisen i Teorem 20.

12. Låt $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ vara en deduktion där x_i inte förekommer fri i någon premiss. Antag som induktionshypotes att deduktionen $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ är sund och låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{\forall x_i A}$. Låt $\mathcal{M}$ vara en L-modell och s en $\mathcal{M}$-tolkning som satisfierar alla premisser i $\mathcal{R}$ och således i $\mathcal{P}$. Låt $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ vara ett godtyckligt element. Eftersom x_i inte förekommer fri i premisserna till $\mathcal{P}$ så satisfieras de även av tolkningen $s(a/x_i)$ enligt Lemma 55. Eftersom $\mathcal{P}$ är sund gäller $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ och således enligt Tarskis sanningsdefinition $\mathcal{M} \models_s \forall x_i A$.

13. Antag som induktionshypotes att $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \forall x_i A\end{matrix}$ är en sund deduktion. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \forall x_i A\end{matrix}}{A(t/x_i)}$ där t är fri för variableln x_i i A. Låt $\mathcal{M}$ och s satisfiera premisserna till $\mathcal{R}$ och således till $\mathcal{P}$. Enligt induktionhypotesen gäller $\mathcal{M} \models_s \forall x_i A$. Således gäller för varje $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ att $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ och då i synnerhet
$$\mathcal{M} \models_{s(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle/x_i)} A.$$
Eftersom t är fri för x_i i A gäller enligt Substitutionslemmat (Lemma 61) $\mathcal{M} \models_s A(t/x_i)$.

14. Antag att $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{matrix}$ är en sund deduktion och t är fri för x_i i A. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{matrix}}{\exists x_i A}$. Låt $\mathcal{M}$ och s satisfiera premisserna till $\mathcal{R}$. Dessa är samma som

premisserna till $\mathcal{P}$ så enligt induktionshypotesen gäller $\mathcal{M} \models_s A(t/x_i)$. Enligt Substitutionslemmat (Lemma 61) gäller då $\mathcal{M} \models_{s(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle/x_i)} A$. Eftersom $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle \in \operatorname{dom}\mathcal{M}$ så gäller $\mathcal{M} \models_s \exists x_i A$.

15. Antag att $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists x_i A\end{array}$ och $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}$ är sunda deduktioner och att x_i inte förekommer fri i B eller i någon premiss i $\mathcal{Q}$ förutom i A. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists x_i A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}}{B}$.

Låt $\mathcal{M}$ och s satisfiera premisserna till $\mathcal{R}$. De satisfierar då premisserna till $\mathcal{P}$ och därmed enligt induktionhypotesen $\exists x_i A$. Det finns alltså något $a \in \operatorname{dom}(\mathcal{M})$ så att $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$. Således satisfierar $s(a/x_i)$ premissen A i $\mathcal{Q}$. Eftersom s satisfierar de övriga premisserna till Q och x_i inte förekommer fri i dessa så satisfierar $s(a/x_i)$ alla premisser i $\mathcal{Q}$. Enligt induktionshypotesen gäller då $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} B$. Eftersom x_i inte förekommer fri i B gäller enligt Lemma 55 $\mathcal{M} \models_s B$.

□

Korollarium 67. *Om det finns en naturlig deduktion av A så är A valid.*

Bevis. Om A har en naturlig deduktion utan premisser så satisfierar alla modeller och tolkningar premisserna i deduktionen. Enligt sundhetsteoremet satisfierar de då A. □

Sundhetsteoremet använder vi på motsvarande sätt som inom satslogiken. Om vi vill visa att det inte finns en deduktion av en formel A, eventuellt från en given mängd premisser, så kan vi visa att formeln inte är valid, resp. en logisk konsekvens av premisserna. Av sundhetsteoremet följer då att A inte kan härledas.

Exempel 68. Vi visar att det inte finns en naturlig deduktion av formeln $\exists y \forall x R_0(x, y)$ från formeln $\forall x \exists y R_0(x, y)$. Låt nämligen $\operatorname{dom}(\mathcal{M}) = \{0, 1\}$ och $R_0^{\mathcal{M}} = \{(0, 1), (1, 0)\}$. Då gäller för varje $\mathcal{M}$-tolkning s (en skulle räcka) att

- $(s(0/x)(1/y)(x), s(0/x)(1/y)(y)) = (0, 1) \in R_0^{\mathcal{M}}$, så $\mathcal{M} \models_{s(0/x)(1/y)} R_0(x, y)$, så $\mathcal{M} \models_{s(0/x)} \exists y R_0(x, y)$
- $(s(1/x)(0/y)(x), s(1/x)(0/y)(y)) = (1, 0) \in R_0^{\mathcal{M}}$, så $\mathcal{M} \models_{s(1/x)(0/y)} R_0(x, y)$, så $\mathcal{M} \models_{s(1/x)} \exists y R_0(x, y)$

dvs. för varje $a \in \operatorname{dom}(\mathcal{M})$ gäller $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} \exists y R_0(x, y)$ och således $\mathcal{M} \models_s \forall x \exists y R_0(x, y)$.

Ändå gäller för inget $a \in \operatorname{dom}(\mathcal{M})$ att $(a, a) \in R_0^{\mathcal{M}}$. Så $M \not\models_{s(a/y)(a/x)} R_0(x, y)$, och därmed $M \not\models_{s(a/y)} \forall x R_0(x, y)$, hur vi än väljer a. Så $\mathcal{M} \not\models_s \exists y \forall x R_0(x, y)$.

Vi har visat att $\exists y \forall x R_0(x, y)$ inte är en logisk konsekvens av $\forall x \exists y R_0(x, y)$. Enligt sundhetsteoremet gäller då

$$\{\forall x \exists y R_0(x, y)\} \nvdash \exists y \forall x R_0(x, y).$$