2.7 Naturlig deduktion

I satslogiken introducerade vi deduktion som ett behändigare sätt att finna logiska konsekvenser än vad sanningsvärdetabeller ger. I predikatlogiken har vi inga sanningsvärdetabeller så deduktionen blir än viktigare. Det går att bevisa att validitet är ett s.k. icke beräkningsbart problem, d.v.s. det finns ingen algoritm som avgör om en given formel är valid eller inte.

I satslogiken byggde vi upp deduktioner med introduktions- och elimineringsregler för konnektiven. Samma regler använder vi inom predikatlogiken. Eftersom predikatlogiken dessutom har kvantifikatorer behöver vi fler regler. Idén är fortfarande densamma, vi bygger deduktioner med hjälp av introduktion och eliminering.

Elimineringsregeln för allkvantifikatorn är

$$\frac{\forall x A}{A(t/x)}\ \forall\text{ E}$$

Notera att t måste vara fri för x (annars är $A(t/x)$ inte definierad). I övrigt får t vara en godtycklig term. Motiveringen till regeln kommer av att iplikationen $\forall x A \to A(t/x)$ är valid.

I regeln för introduktion av allkvantifikatorn behövs ett tilläggsvillkor.

$$\frac{A}{\forall x A}\ \forall\text{ I}$$

Villkor: x får inte förekomma fri i någon (ostruken) premiss som förekommer i deduktionen av A.

Villkoret behövs för att härledninssteget skall vara sunt. Intuitivt uttrycker A någon egenskap av x. Från att ett visst element har den egenskapen kan vi inte härleda att alla element skulle ha den. Men om härledningen inte innehåller premisser där x skulle förekomma fri, så har vi inte gjort några antaganden om x. Således kunde x vara vilket element som helst och därför gäller $\forall x$. En noggrannare motivering kommer i beviset av sundhetsteoremet i följande avsnitt.

Exempel 62. Ett enkelt exempel på användning av eliminerings- och introduktionsreglerna för allkvantifikatorn är följande.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x P(x)}{P(y)}\ \forall\text{ E}}{\forall y P(y)}\ \forall\text{ I}$$

Notera att y är fri för x i $P(x)$ och att y inte förekommer fri i premissen $\forall x P(x)$.

Den enkla regeln för existenskvantifikatorn är introduktionsregeln:

$$\frac{A(t/x)}{\exists x A}\ \exists\text{ I}$$

Det enda kravet här är att t måste vara fri för x. I övrigt kan t vara en godtycklig term. Regeln motiveras med att $A(t/x) \to \exists x A$ är valid.

För att eliminera en existenskvantifikator behövs ett tilläggsvillkor. Regeln är:

$$\frac{\exists x A \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{B}\ \exists\text{ E}$$

Villkor: x får inte förekomma fri i B eller i någon ostruken premiss som förekommer i deduktionen av B, förutom i A.

Resonemanget i regeln påminner om det i elmininering av disjunktion. Informellt resonerar vi: Vi vet att $\exists xA$ stämmer. Vi gör ett tillfälligt antagande att A stämmer (dvs att x ger det värde som satisfierar A) och härleder något allmängiltigt därifrån. Om vår slutsats inte säger något om x spelar det ingen roll vilket element det är som satisfierar A, slutsatsen är ändå giltig eftersom *något* x duger. Så vi drar slutsatsen B och stryker vår tillfälliga premiss A.

Exempel 63. Vi härleder $\exists xA$ från $\neg\forall x\neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{\exists xA}\,\exists\text{ I} \qquad [\neg\exists xA]^2}{\exists xA \wedge \neg\exists xA}\,\wedge\text{ I}}{\neg A}\,\neg\text{ I, }1}{\forall x\neg A}\,\forall\text{ I, obs} \qquad \neg\forall x\neg A}{\forall x\neg A \wedge \neg\forall x\neg A}\,\wedge\text{ I}}{\neg\neg\exists xA}\,\neg\text{ I, }2}{\exists xA}\,\neg\text{ E}$$

obs: x förekommer inte fri i $\neg\exists xA$, den enda ostrukna premiss vi har kvar i det här skedet.

Exempel 64. Vi härleder $\neg\forall x\neg A$ från $\exists xA$.

$$\dfrac{\exists xA \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad \dfrac{[\forall x\neg A]^1}{\neg A}\,\forall\text{ E}}{A \wedge \neg A}\,\wedge\text{ I}}{\neg\forall x\neg A}\,\neg\text{ I, }1}{\neg\forall x\neg A}\,\exists\text{ E, 2, obs}$$

obs: x förekommer inte fri i $\neg\forall x\neg A$ och den enda ostrukna premiss vi har kvar i deduktionen av $\neg\forall x\neg A$ är A där x fick förekomma fri.

Formellt kan vi definiera naturlig deduktion som i Definition 19, med några additioner:

Definition 65. Mängden av deduktioner $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ i predikatlogiken definieras som i definition 19 med den skillnaden att triviala deduktioner (punkt 1.) utgörs av *predikatlogiska* formler A samt med följande tillägg:

12. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ är en deduktion och x_i inte förekommer fri i någon ostruken premiss i deduktionen $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$, så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{\forall x_i A}$ en deduktion.

13. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \forall x_i A\end{matrix}$ är en deduktion och t är en term som är fri för x_i i A så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \forall x_i A\end{matrix}}{A(t/x_i)}$ en deduktion.

14. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{matrix}$ är en deduktion och t är en term som är fri för x_i i A så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{matrix}}{\exists x_i A}$ en deduktion.

15. Om $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists x_i A\end{array}$ och $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}$ är deduktioner och x_i inte förekommer fri i B eller i någon ostruken premiss i deduktionen $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}$, förutom i A, så är

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists x_i A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}}{B}$$

en deduktion.

Om $\mathcal{S}$ är en mängd predikatlogiska formler och A är en predikatlogisk formel använder vi som förut notationen

$$S \vdash A$$

för att beteckna att det finns en naturlig deduktion av A så att premisserna är i $\mathcal{S}$.

Vi sammanställer deduktionsreglerna i Tabell 4.

	Introduktion	Elimination
Konjunktion	$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\ \wedge\,\mathrm{I}$	$\dfrac{A \wedge B}{A}\ \wedge\,\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\ \wedge\,\mathrm{E}$
Disjunktion	$\dfrac{A}{A \vee B}\ \vee\,\mathrm{I} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\ \vee\,\mathrm{I}$	$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ \vee\,\mathrm{E}$
Implikation	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\ \to\mathrm{I}$	$\dfrac{A \to B \qquad A}{B}\ \to\mathrm{E}$
Ekvivalens	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ A\end{array}}{A \leftrightarrow B}\ \leftrightarrow\mathrm{I}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B \qquad A}{B}\ \leftrightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \qquad B}{A}\ \leftrightarrow\mathrm{E}$
Negation	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{array}}{\neg A}\ \neg\,\mathrm{I}$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\,\mathrm{E}$
Allkvantifikator	$\dfrac{A}{\forall x_i A}\ \forall\,\mathrm{I}$ x_i får inte förekomma fri i någon premiss i deduktionen av A	$\dfrac{\forall x_i A}{A(t/x_i)}\ \forall\,\mathrm{E}$ t måste vara fri för x_i i A
Existenskvantifikator	$\dfrac{A(t/x_i)}{\exists x_i A}\ \exists\,\mathrm{I}$ t måste vara fri för x_i i A	$\dfrac{\exists x_i A \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{B}\ \exists\,\mathrm{E}$ x_i får inte förekomma fri i B eller i någon premiss i deduktionen av B, förutom i A

Tabell 4: Predikatlogikens deduktionsregler