2.6 Substitution

Låt x vara en variabel, t en L-term och A en L-formel. Vi vill undersöka $A(t/x)$, den formel vi får då vi substituerar t för alla fria förekomster av x. Men om A är $\exists y\ x < y$ vad är då $A(y/x)$? A uttrycker egenskapen "det finns ett element större än x" så vi skulle vilja säga "det finns ett element större än y. Om vi substituerar y för x får vi dessvärre formeln $\exists y\ y < y$ som uttrycker att det finns ett element som är större än sig självt. Lösningen på problemet går ut på att först omdöpa de bundnda variablerna i A så att substitutionen blir möjlig.

Eftersom tolkningen av de bundna variablerna i en formeln inte påverkar satisfieringen av formeln så kan vi byta ut bundna variabler utan att ändra på betydelsen av formeln. Så är t.ex formlerna

$$\forall x R_0(x,y) \quad \text{och} \quad \forall z R_0(z,y)$$

ekvivalenta. Här måste vi bara vara noggranna så att vi inte binder nya variabler. Så är t.ex. formlerna

$$\forall x R_0(x,y) \quad \text{och} \quad \forall y R_0(y,y)$$

inte ekvivalenta. Men det finns en enkel lösning på problemet. Eftersom formeler är ändliga teckensträngar förekommer det bara ändligt många variabler i dem. Således kan vi alltid välja en ny variabel (dvs en som inte förekommer i formeln) då vi behöver byta ut en bunden variabel. På så sätt kan vi ändra vår ursprungliga formel till en *ekvivalent* formel där substitutionen är möjlig. "Möjlig" definieras exakt av konceptet "fri för".

Definition 58. En L-term t är *fri för* en variabel x_i i en L-formel A om t inte innehåller några variabler som vid substitutionen av t för alla fria förekomster av x_i blir bunden av en kvantifikator i A.

Eftersom de enda termer vi känner hittills utgörs av variabler och konstantsymboler innebär "t är fri för x" att t inte är en variabel som blir bunden då den substitueras för alla fria förekomster av x i A.

Definition 59. Låt L vara ett lexikon, A en L-formel och t en L-term. Med notationen $A(t/x_i)$ avser vi resultatet av substituitionen av t för alla fria förekomster av x_i i A. Vi använder notationen $A(t/x_i)$ bara då t är fri för x_i i A.

Exempel 60.

- z är fri för x i $R(x,y) \wedge \forall y R(x,y)$. Om vi substituerar z för x får vi $R(z,y) \wedge \forall y(z,y)$.
- z är inte fri för x i $\exists z R(x,z) \wedge \forall y R(x,y)$ eftersom en substitution skulle ge $\exists z R(z,z) \wedge \forall y R(z,y)$ där en fri förekomst av x har blivit en bunden förekomst av z.
- En konstant är fri för varje variabel x_i i varje formel eftersom konstanter inte innehåller variabler som kan bli bundna i substitutionen.

Observera att då vi omdöper bundna variabler är resultatet en ekvivalent formel, medan substitution inte resulterar i ekvivalenta formler. $P_0(x)$ och $P_0(y)$ är inte ekvivalenta, vi kan enkelt konstruera en modell och tolkning som satisfierar den ena men inte den andra.

Vi tar här i bruk notationen $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ för *värdet* av termen t i modellen $\mathcal{M}$ under tolkningen s. Vi minns att om t är en variabel x_i så är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x_i)$, om t är en konstant c_i så är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c_i^{\mathcal{M}}$.

Lemma 61 (Substitutionslemmat)**.** *Låt L vara ett lexikon, A en L-formel och t en L-term. Om t är fri för x i A så är följande påståenden ekvivalenta för alla L-modeller $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}$-tolkningar s:*

1. $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$

2. $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$, *där* $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

Bevis. Beviset lämnas som övningsuppgift åt läsaren (strukturell induktion). $\square$

Med hjälp av substitutionslemmat kan vi visa att

$$\forall x A \Rightarrow A(t/x).$$

Låt nämligen $\mathcal{M}$ vara en modell och s en $\mathcal{M}$-tolkning så att $\mathcal{M} \models_s \forall x A$. Låt nu $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$. Då gäller $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$ och enligt substitutionslemmat därmed $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$.

På motsvarande sätt kan vi se att

$$A(t/x) \Rightarrow \exists x A.$$