2.5 Definierbarhet

Ett centralt begrepp inom logiken är definierbarhet. Det anger vilka objekt och egenskaper vi kan greppa med våra formler. Man kan säga att hela idén med formler är att de ger oss verktyg att definiera mängder, relationer och dylikt.

Definition 56. Låt L vara ett lexikon och $\mathcal{M}$ en L-modell. En mängd $P \subset M$ är en *definierbar delmängd* i $\mathcal{M}$ om det finns en L-formel A med fria förekomster endast av variabeln x_0 så att

$$P = \{a \in M \mid \mathcal{M} \models_s A \text{ för alla tolkningar } s \text{ med } s(x_0) = a\}.$$

Vi säger då att A *definierar* P i $\mathcal{M}$. Notera att vi enligt Lemma 55 lika gärna kunde ha skrivit:

$$P = \{a \in M \mid \mathcal{M} \models_s A \text{ för någon tolkning } s \text{ med } s(x_0) = a\}.$$

Om R är en n-ställig relation säger vi att R är en *definierbar relation* i $\mathcal{M}$ om det finns en L-formel B med endast variablerna $x_0, \ldots, x_{n-1}$ fria så att

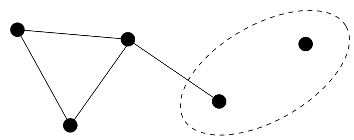
$$R = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in M^n \mid \mathcal{M} \models_s B \text{ för alla tolkningar } s \text{ med } s(x_i) = a_i \text{ för alla } i < n\}.$$

Vi säger då att B *definierar* R i $\mathcal{M}$.

Exempel 57. Låt $L = \{E\}$ och låt $\mathcal{G}$ vara grafen i Figur 5. Låt vidare A vara formeln

$$\forall y \forall z((xEy \land xEz) \to y = z).$$

A har x som enda fria variabel så den definierar en delmängd i $\mathcal{G}$. Formeln uttrycker egenskapen “har högst en granne” så delmängden den definierar är den inom den streckade linjen. Låt oss motivera det noggrannare.



Figur 5: Definierbar delmängd i en graf

Om a är en nod med två (eller fler) grannar finns det två olika noder b och c så att $(a, b) \in E^{\mathcal{G}}$ och $(a, c) \in E^{\mathcal{G}}$. Låt nu s vara en tolkning som satisfierar $s(x) = a$. Då har vi

$$\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} xEy \quad \text{och} \quad \mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} xEz \quad \text{men} \quad \mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} y = z,$$

dvs. $\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} xEy \land xEz$ men $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} y = z$ och således $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} (xEy \land xEz) \to y = z$. Så $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)} \forall z((xEy \land xEz) \to y = z)$ och vidare $\mathcal{G} \not\models_s \forall y \forall z((xEy \land xEz) \to y = z)$.

Om däremot a är en nod med högst en granne och b och c är godtyckliga noder så har vi två alternativ: antingen är någondera inte granne med a eller så måste b och c vara samma nod (eftersom a hade högst en granne). I det förra fallet har vi

$$\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} xEy \quad \text{eller} \quad \mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} xEz$$

och således $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} (xEy \land xEz)$. I det senare fallet har vi

$$\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} y = z.$$

I båda fallen gäller

$$\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} ((xEy \wedge xEz) \to y = z)$$

Eftersom b och c var godtyckliga ser vi att

$$\mathcal{G} \models_s \forall y \forall z((xEy \wedge xEz) \to y = z).$$

Vi har alltså visat att en tolkning s satisfierar formeln A om och endast om $s(x)$ är en nod med högst en granne. Således definierar A mängden av noder med högst en granne.

Familjen av definierbara mängder i en modell är sluten under unioner, snitt och komplement, dvs. om P och P' är definierbara i $\mathcal{M}$ så är också $P \cup P'$, $P \cap P'$ och $\text{dom}(\mathcal{M}) - P$ det. (Familjen är en Boolesk algebra.) Detsamma gäller familjen av definierbara relationer.

Om R är en binär relation på en mängd M är den *första projektionen* av R mängden av element a så att $(a, b) \in R$ stämmer för något $b \in M$. På motsvarande sätt är den *andra projektionen* av R mängden av $b \in M$ så att $(a, b) \in R$ för något $a \in M$. Projektionerna av definierbara relationer är definierbara (varför?).