2.4 Fria och bundna variabler

Låt oss jämföra rollen av 'x' i två formler: $R(x, y)$ och $\exists x\ R(x, y)$. Om vi nu granskar en $\{R\}$-modell $\mathcal{M}$ och en $\mathcal{M}$-tolkning s ser vi att sanningen av påståendet $\mathcal{M} \models_s R(x, y)$ beror på hur s tolkar x medan sanningen av $\mathcal{M} \models_s \exists x\ R(x, y)$ inte gör det. Skillnaden beror på att x i den första formeln är *fri* men i den andra *bunden* eftersom kvantifikatorn $\exists$ binder den. Vi definierar begreppen nedan.

Definition 49. En kvantifikators *räckvidd* i en formel A är den delformel av A i vilken kvantifikatorförekomsten är huvudoperator, med andra ord är en kvantifikators räckvidd den minsta delsträng av formeln som börjar med kvantifikatorn i fråga och är en predikatlogisk formel.

Exempel 50. I formlerna nedan är räckvidden av kvantifikatorn $\forall x$ understruken:

$$\underline{\forall x(R_0(x, y) \to R_1(z, x))}$$
$$\underline{\forall x R_0(x, y)} \to R_1(z, x)$$

Definition 51. En förekomst av en variabel x_i är *bunden* om den finns inom räckvidden av en kvantifikator $\forall x_i$ eller $\exists x_i$. En förekomst av en variabel är *fri* om den inte är bunden. En kvantifikator $\forall x_i$ eller $\exists x_i$ *binder* alla fria förekomster av variabeln x_i inom kvantifikatorns räckvidd.

Exempel 52. I formeln $R(x, y)$ är alla variabelförekomster fria.
I formeln $\exists x\ R(x, y)$ är x bunden och y fri.
I formeln $\forall y(R(x, y) \to \exists x\ R(x, y))$ är den första förekomsten av x fri, de övriga bundna. y är bunden.
I formeln $\forall x \forall y(R(x, y) \to \exists x\ R(x, y))$ binder den första kvantifikatorn $\forall$ den *fria* förekomsten av x i formeln $\forall y(R(x, y) \to \exists x\ R(x, y))$. De senare förekomsterna berörs inte för de är redan bundna.

En variabel är fri i formeln A om minst en förekomst av variabeln är fri i A. En variabel är bunden i A om minst en förekomst av variablen är bunden i A. Således kan en variabel vara både fri och bunden, men en variabel*förekomst* är alltid bara endera.

Definition 53. En *sluten formel* eller *sats* är en formel utan fria variabler. En *öppen formel* är en formel med minst en fri variabel. En *variabelfri formel* är en formel i vilken inga variabler förekommer. En *kantifikatorfri formel* är en formel som inte innehåller några kvantifikatorer.

Exempel 54. Följande formler är slutna:

$$P(c_1)$$
$$R(c_0, c_1) \to c_0 = c_1$$
$$\forall x R(x, x)$$

De två första är dessutom kvantifikatorfria och variabelfria. De visar att kvantifikatorfria formler inte nödvändigtvis är öppna. Öppna formler är inte heller nödvändigtvis kvantifikatorfria, vilket följande formel visar:

$$\forall x R(x, y)$$

Då vi granskar sanningen av en formel i en modell under en tolkning spelar endast tolkningarna av de fria variablerna någon roll, eftersom de övriga värdena ändå "omtolkas". Exaktare uttryckt:

Lemma 55. *Låt A vara en L-formel och $\mathcal{M}$ en L-modell. Om s och s' är två tolkningar som ger samma värden åt alla variabler med fria förekomster i A så är A sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om och endast om A är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s'.*

Bevis. Beviset lämnas som övningsuppgift. □

Som ett specialfall av fenomenet ovan ser vi att sanningen av slutna formler (satser) i modeller är oberoende av vilken tolkning vi granskar. Således uttrycker satserna någon egenskap modellerna har, i motsats till öppna formler som uttrycker egenskaper av element.

Vi definierade tidigare när A är sann i $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models A \quad \text{om och endast om} \quad \mathcal{M} \models_s A \text{ för alla } \mathcal{M}\text{-tolkningar } s.$$

Då A är en sats är $\mathcal{M} \models A$ ekvivalent med

$$\mathcal{M} \models_s A \text{ för någon } \mathcal{M}\text{-tolkning } s.$$

Då en sats A är sann i $\mathcal{M}$ säger vi att $\mathcal{M}$ är en *modell för A*.