2.3 Validitet och logiska konsekvenser

I satslogiken delade vi upp formlerna i tautologa, kontradiktoriska och kontingenta. Vi skall se vad motsvarande uppdelning i predikatlogiken är.

Tarskis sanningsdefinition definierar när en L-formel A är sann i en given L-modell $\mathcal{M}$ under en given $\mathcal{M}$-tolkning s. Om formeln är sann i $\mathcal{M}$ oberoede av vilken $\mathcal{M}$-tolkning vi granskar, så säger vi att A är *sann i* $\mathcal{M}$ och skriver $\mathcal{M} \models A$.

$$\mathcal{M} \models A \quad \text{om och endast om} \quad \mathcal{M} \models_s A \text{ för alla } \mathcal{M}\text{-tolkningar } s.$$

En L-formel A är *valid* om den är sann i alla L-modeller M. Det betecknas $\models A$.

$$\models A \quad \text{om och endast om} \quad \mathcal{M} \models A \text{ för alla } L\text{-modeller } \mathcal{M}.$$

En allmännare tolkning för "alltid sann" än valid kan vi inte hoppas på. Om A är en L-formel behövs en L-modell för att sanning skall kunna definieras. Därför är predikatlogikens tolkning av "alltid" alla L-modeller.

Specialfall av valida formler är tautologier, dvs formler som har samma form som satslogiska tautologier, men där delformlerna är predikatlogiska formler. Exempel på predikatlogiska tautologier är

- $(R(x, y) \lor \neg R(x, y))$
- $(P(x) \land (R(x, y) \lor R(y, z))) \leftrightarrow ((P(x) \land R(x, y)) \lor (P(x) \land R(y, z)))$
- $(P_0(x) \to P_1(x)) \to (\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$

Förutom dessa finns en hel mängd valida formler som inte är tautologier, t.ex

- $x = x$
- $x = y \to y = x$
- $\forall x P(x) \to \exists y P(y)$
- $R(x, y) \to \exists z R(x, z)$

På motsvarande sätt kan vi definiera när en formel "kan vara sann" dvs. är satisfierbar. En L-formel A är *satisfierbar* om det finns någon L-modell $\mathcal{M}$ och någon $\mathcal{M}$-tolkning s som satisfierar den, dvs. $\mathcal{M} \models_s A$ för något $\mathcal{M}$ och s. Vidare kan vi definiera att A är *kontradiktorisk* om det här inte inträffar, dvs. om för alla L-modeller $\mathcal{M}$ och alla $\mathcal{M}$-tolkningar s, $\mathcal{M} \not\models_s A$. En L-formel A är *falsifierbar* om den inte är valid, dvs. det finns någon L-modell $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}$-tolkning s så att $\mathcal{M} \not\models_s A$. Om en formel är både satisfierbar och falsifierbar är den *kontingent.*

Exempel 48. Låt $L = \{R\}$.

- Formeln $\forall x \forall y (R(x, y) \lor \neg R(x, y))$ är valid (men inte en tautologi - varför?).
- Formeln $\forall x \forall y (R(x, y) \lor R(y, x))$ är kontingent. Om vi definierar $M = \{0, 1\}$ och $R_1 = \emptyset$, $R_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ så är formeln falsk i (M, R_1) men sann i (M, R_2).
- Formeln $x = y$ är kontingent. Till skillnad från formeln ovan kan den vara sann och falsk i samma modell (bara domänen har minst två element) beroende på tolkningen.

- Formeln $\forall x \forall y R(x, y) \wedge \exists x \neg R(x, x)$ är kontradiktorisk. Om $\mathcal{M}$ är en modell som satisfierar formeln $\forall x \forall y R(x, y)$ så måste alla par (a, b), där a och b är i domänen, tillhöra $R^{\mathcal{M}}$. Men då måste också $(a, a) \in R^{\mathcal{M}}$ för alla a i domänen av $\mathcal{M}$, så $\mathcal{M}$ kan inte satisfierar $\exists x \neg R(x, x)$.

Som i satslogiken har vi alltså tre kategorier av formler, men denhär gången är de *valida*, *kontradiktoriska* och *kontingenta*. De valida och kontingenta formlerna är satisfierbara, de kontradiktoriska och kontingenta är falsifierbara.

Om A och B är formler för samma lexikon L säger vi att B är en *logisk konsekvens* av A om i alla L-modeller varje tolkning s som satisfierar A också satisfierar B. Ekvivalent kan vi uttrycka det som att formeln $A \to B$ valid.

Om A och B är formler för samma lexikon L säger vi att A och B är *(logiskt) ekvivalenta* om de är logiska konsekvenser av varandra, dvs. de är sanna med samma tolkningar i samma modeller. Ekvivalent kan vi uttrycka det som att formeln $A \leftrightarrow B$ är valid. Exempel på logiksa ekvivalenser är

- $\neg \forall x A$ och $\exists x \neg A$
- $\neg \exists x A$ och $\forall x \neg A$
- $\forall x (A \wedge B)$ och $\forall x A \wedge \forall x B$