2.2 Formler och sanningsvillkor

Jämfört med satslogikens formler har predikatlogiken två viktiga särdrag. Dels använder vi i sammansatta formler förutom de bekanta konnektiven $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$ också *kvantifikatorerna* $\forall x$ (allkvantifikator, för alla x) och $\exists x$ (existenskvantifikator, för något x). Dels har vi i de atomära formlerna långt större uttrycksmöjligheter än vad satslogikens satssymboler erbjuder. Exakt hur våra atomära formler ser ut beror på vårt lexikon.

Som förut gäller det att hålla isär syntaxen (hur formlerna ser ut) och semantiken (vad de betyder). Formler är syntaktiska enheter, teckensträngar med en bestämd struktur. De symboler vi använder kan delas in i två grupper: logiska symboler och icke-logiska symboler. De logiska symbolerna är gemensamma för alla predikatlogiska språk och tolkas alltid på samma sätt. De icke-logiska symbolerna består av symbolerna i det aktuella lexikonet.

Logiska symboler
Variabler: $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (i praktiken ofta $x, y, z, \ldots$)
Parenteser: (,)
Konnektiv: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Kvantifikatorsymboler: $\forall, \exists$
Identitetstecken: $=$

Icke-logiska symboler (Symbolerna i lexikonet L)
Konstantsymboler: $c_0, c_1, c_2, \ldots$
Predikatsymboler: $R_0, R_1, R_2, \ldots$ (i praktiken ofta också $P_1, P_2, \ldots$)
Funktionssymboler: $f_0, f_1, f_2, \ldots$

Predikatlogikens atomära formler uttrycker egenskaper och förhållanden såsom

- x är lackad
- $x = y$
- $x < 10$
- $R_0(x, c)$

De entiteter som formlerna "talar om" kallas *termer* (x, y, 10 och c ovan). Så länge lexikonet inte innehåller funktionssymboler utgörs termerna av variabler och konstantsymboler.

Definition 39. Låt L vara ett lexikon. De *atomära L-formlerna* bestäms enligt följande:

1. Om t och u är termer så är $t = u$ en atomär L-formel.
2. Om $R_i \in L$ är en n-ställig predikatsymbol och $t_0, \ldots t_{n-1}$ är termer så är $R_i(t_0, \ldots, t_{n-1})$ en atomär L-formel.

Definitionen ovan gäller också ifall lexikonet har funktionssymboler men termerna kan då vara mer komplexa än enbart variabler och konstantsymboler.

Innan vi går vidare till sammansatta formler skall vi ta oss en titt på de atomära formlernas semantik. Om vi granskar modellen i Exempel 34 känns det naturligt att vi behöver ett lexikon med två symboler för enställiga predikat $L = \{P_0, P_1\}$. Det känns också naturligt att tolkningarna av P_0 och P_1 skall vara predikaten A_0 och A_1. Men hur skall vi tolka ett uttryck av formen

$$P_0(x)\,?$$

Vad är x? Det är här vi ser skillnaden på variabler och konstanter. Så länge vi håller oss till atomära formler är det ingen skillnad på hur vi syntaktiskt behandlar konstantsymboler och variabler. Bägge används likadant i atomära formler. Men då vi skall tolka formlerna har konstantsymbolerna ett fast värde medan variablernas värde varierar. Det som avgör hur variablerna tolkas är en *tolkning*. Om L är ett lexikon och $\mathcal{M}$ en L-struktur, dvs. en modell för lexikonet L, med domän M så är en $\mathcal{M}$-*tolkning* en funktion $s : \{x_i | i \in \mathbb{N}\} \to M$.

Exempel 40. Låt $L = \{R, c\}$. Granska L-strukturen $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <, 0)$. Dess domän utgörs av heltalen $\mathbb{Z}$ och tolkningarna för lexikonets symboler är

$$\begin{aligned} &R^{\mathcal{M}} =<= \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 | a < b\} \\ &c^{\mathcal{M}} = 0 \end{aligned}$$

Vi kan nu granska värdena för variablerna x_0, x_1 och x_2 under olika tolkningar.

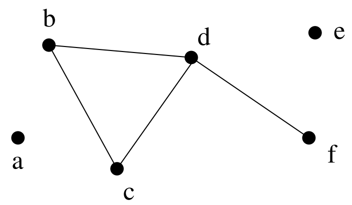
- $s_0(x_0) = 2$, $s_0(x_1) = 7$, $s_0(x_2) = 2$,
- $s_1(x_0) = 3$, $s_1(x_1) = 0$, $s_1(x_2) = 1$,

Vi ser bland annat att $s_0(x_0) = s_0(x_2)$ och $s_1(x_1) = c^{\mathcal{M}}$. Vi säger att s_0 satisfierar formeln $x_0 = x_2$ och s_1 satisfierar formeln $x_1 = c$.

Definition 41. Låt L vara ett lexikon utan funktionssymboler och låt $\mathcal{M}$ vara en modell för L. Låt vidare s vara en $\mathcal{M}$-tolkning. Då t är en term betecknas termens t värde under tolkningen s med $s(t)$. Om t är en variabel x_i är $s(t) = s(x_i)$. Om t är en konstantsymbol c är $s(t) = c^{\mathcal{M}}$. Atomära formler satisfieras nu enligt följande:

1. Om t och u är termer är formeln $t = u$ sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om $s(t) = s(u)$.
2. Om $t_1, \ldots t_n$ är termer och R_i är en n-ställig predikatsymbol så är formeln $R_i(t_1, \ldots t_n)$ sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om $(s(t_1), \ldots s(t_n)) \in R_i^{\mathcal{M}}$.

Exempel 42. Låt $\mathcal{G}$ vara grafen i Figur 4. Grafen är en modell för lexikonet $\{E\}$ där E



Figur 4: En graf $\mathcal{G}$

är en tvåställig predikatsymbol. Om nu s_0, s_1 och s_2 är följande $\mathcal{G}$-tolkningar

	x	y
s_0	a	b
s_1	d	f
s_2	c	c

så är formeln $E(x,y)$ sann i $\mathcal{G}$ under tolkningen s_1 eftersom det finns en båge mellan d och f dvs. $(d,f) \in E^{\mathcal{G}}$. Formeln $E(x,y)$ är inte sann i $\mathcal{G}$ under tolkningarna s_0 och s_2 eftersom (a,b) och (c,c) inte motsvarar bågar i grafen. Å andra sidan är formeln $x = y$ sann i $\mathcal{G}$ under s_2 eftersom $s_2(x) = c = s_2(y)$.

Vi återvänder till den syntaktiska betraktelsen av predikatlogiken. Efter att ha definierat atomära formler kan vi induktivt definiera vad en L-formel är.

Definition 43. Låt L vara ett lexikon. Vi definierar mängden av L-formler enligt följande:

1. Varje atomär L-formel (se Definition 39) är en L-formel.
2. Om A och B är L-formler så är
$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$$
L-formler.
3. Om A är en L-formel och x_i är en variabel så är $\forall x_i A$ och $\exists x_i A$ L-formler.

Punkt 2 ovan känner vi igen från satslogiken. Vår tolkning av konnektiven sammanfaller med den i satslogiken.

Definition 44. Låt L vara ett lexikon och låt $\mathcal{M}$ vara en modell för L. Låt vidare s vara en $\mathcal{M}$-tolkning.

1. $\neg A$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om A inte är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s.
2. $(A \wedge B)$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om både A och B är sanna i $\mathcal{M}$ under tolkningen s.
3. $(A \vee B)$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om A eller B är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s.
4. $(A \rightarrow B)$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om A inte är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s eller B är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s.
5. $(A \leftrightarrow B)$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om antingen båda eller ingendera är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s.

Det nya är konnektiven i 3. Intuitivt säger $\forall x_i A$ att A stämmer oberoende av hur vi tolkar x_i och $\exists x_i A$ säger att A stämmer för någon tolkning av x. Hur skall vi då definiera när en tolkning satisfierar en kvantifierad formel? Ett första försök är att säga att s satisfierar $\exists x_i A$ om s satisfierar A för någon tolkning av x_i. Men s har ju redan en tolkning för x_i som inte nödvändigtvis satisfierar A. Lösningen är att modifiera s:

Definition 45. Om $\mathcal{M}$ är en modell med domän M och s är en $\mathcal{M}$-tolkning definierar vi $s(a/x_i)$ enligt:
$$s(a/x_i)(x_j) = \begin{cases} a & \text{om } j = i \\ s(x_j) & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi illustrerar idén nedan.

	x	y	z
s	1	7	3
$s(3/x)$	3	7	3
$s(4/y)$	1	4	3

Definition 46. Låt L vara ett lexikon och låt $\mathcal{M}$ vara en modell för L med domän M. Låt vidare s vara en $\mathcal{M}$-tolkning.

1. Formeln $\forall x_i A$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om A är sann i $\mathcal{M}$ under alla tolkningar $s(a/x_i)$ där $a \in M$.
2. Formeln $\exists x_i A$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om A är sann i $\mathcal{M}$ under någon tolkning $s(a/x_i)$ med $a \in M$.

Vi har nu definierat (i Definitioner 39, 44 och 46) när en predikatlogisk formel A är sann i en modell $\mathcal{M}$ under en tolkning s. Vi skriver det kort

$$\mathcal{M} \models_s A.$$

Vi sammanställer predikatlogikens sanningsdefinition, känd som Tarskis sanningsdefinition nedan.

Definition 47 (Tarskis sanningsdefinition)**.** Låt L vara ett lexikon och $\mathcal{M}$ en modell för L. Nedan är $t, u, t_1, \dots t_n$ termer och R en n-ställig predikatsymbol.

1. $\mathcal{M} \models_s t = u$ om och endast om $s(t) = s(u)$.
2. $\mathcal{M} \models_s R(t_1, \dots t_n)$ om och endast om $(s(t_1), \dots s(t_n)) \in R^{\mathcal{M}}$.
3. $\mathcal{M} \models_s \neg A$ om och endast om $\mathcal{M} \not\models_s A$.
4. $\mathcal{M} \models_s (A \wedge B)$ om och endast om $\mathcal{M} \models_s A$ och $\mathcal{M} \models_s B$.
5. $\mathcal{M} \models_s (A \vee B)$ om och endast om $\mathcal{M} \models_s A$ eller $\mathcal{M} \models_s B$.
6. $\mathcal{M} \models_s (A \to B)$ om och endast om $\mathcal{M} \not\models_s A$ eller $\mathcal{M} \models_s B$.
7. $\mathcal{M} \models_s (A \leftrightarrow B)$ om och endast om antingen $\mathcal{M} \models_s A$ och $\mathcal{M} \models_s B$ eller $\mathcal{M} \not\models_s A$ och $\mathcal{M} \not\models_s B$.
8. $\mathcal{M} \models_s \forall x_i A$ om och endast om $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ för alla $a \in M$.
9. $\mathcal{M} \models_s \exists x_i A$ om och endast om $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ för något $a \in M$.