2.12 Isomorfism

Om vi vill ge en modell för en linjär ordning med 5 element kan vi välja heltalen

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5.$$

Men vi kan lika gärna välja fem olika reella tal (t.ex. 0,25, e, π, 4 och $\sqrt{20}$) eller fem abstrakta element $a < b < c < d < e$. Strukturen ser lika ut i alla fall, endast namnen på elementen varierar. Dethär fenomenet uttrycker vi genom att säga att alla modeller ovan är *isomorfa* sinsemellan.

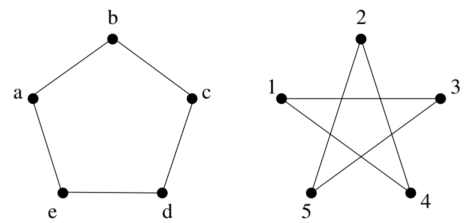
Definition 80. Låt L vara ett lexikon och $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ två L-modeller. En funktion f är en *isomorfism* $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ om:

1. f är en bijektion $f : M \to M'$ ($M = \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ och $M' = \mathrm{dom}(\mathcal{M}')$)
2. för varje konstantsymbol $c \in L$ gäller
$$f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'}$$
3. för varje n-ställig relationssymbol $R \in L$ och varje $a_1, \ldots, a_n \in M$ gäller
$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \text{ om och endast om } (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\mathcal{M}'}$$
4. för varje n-ställig funktionssymbol $F \in L$ och varje $a_1, \ldots, a_n \in M$ gäller
$$f(F^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{M}'}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$$

Om det finns en isomorfism $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ säger vi att modellerna $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ är *isomorfa med varandra.*

Intuitivt uttryckt är två modeller isomorfa om de är likadana i allt annat än namnen på elementen.

Exempel 81. De två graferna i Figur 6 är isomorfa.



Figur 6: Två isomorfa grafer

Vi ser det genom t.ex. isomorfismen f, där

$$f(a) = 1, \ f(b) = 3, \ f(c) = 5, \ f(d) = 2, \ f(e) = 4$$

för då gäller att alla nodpar i den första grafen avbildas på ett nodpar i den andra så att det första nodparet är grannar om och endast om deras bilder är grannar.

Ur logikens synpunkt är två isomorfa modeller likadana. Det innebär att isomorfa modeller satisfierar samma satser. För att bevisa detta måste vi gå via formler. Deras sanning i givna modeller beror emellertid på tolkningen så vi behöver ett sätt att jämföra tolkningar i isomorfa modeller.

Definition 82. Låt $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ vara två isomorfa L-modeller och f en isomofism $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$. Vi säger att en $\mathcal{M}$-tolkning s och en $\mathcal{M}'$-tolkning s' är *konjugater* med avseende på f om $s'(x) = f(s(x))$ för varje variabel x.

Vi kan nu bevisa att om $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ är isomorfa och s och s' är konjugater så gäller för alla formler A: $\mathcal{M} \models_s A$ om och endast om $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Vi börjar med ett lemma om termer.

Lemma 83. *Låt L vara ett lexikon, $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ isomorfa L-modeller, s en $\mathcal{M}$-tolkning och s' en $\mathcal{M}'$-tolkning så att $f : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ är en isomorfism och s och s' är konjugater med avseende på f. Då gäller för varje L-term t:*

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle.$$

Bevis. Vi bevisar lemmat med induktion över termer.

Fall 1: t är en konstantsymbol c. Då är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c^{\mathcal{M}}$ och $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = c^{\mathcal{M}'}$. Eftersom f är en isomorfism gäller $f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'}$ så $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$.

Fall 2: t är en variabel x. Då är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x)$ och $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = s'(x)$. Eftersom s och s' är konjugater med avseende på f gäller $f(s(x)) = s'(x)$ så $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$.

Fall 3: t är $F^n(t_1, \dots, t_n)$ och (induktionshypotes:) påståendet gäller för $t_1, \dots, t_n$. Då är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = (F^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \dots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$ och $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = (F^n)^{\mathcal{M}'}(t_1^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle, \dots, t_n^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle)$. Enligt induktionshypotesen är $f(t_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t_i^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle)$ för varje $1 \leq i \leq n$ och eftersom f är en isomorfism gäller $f((F^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \dots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) = (F^n)^{\mathcal{M}'}(f(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle), \dots, f(t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle))$. Således har vi

$$\begin{aligned}
f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) &\overset{\text{def}}{=} f((F^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \dots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) \\
&\overset{f \text{ isom.}}{=} (F^n)^{\mathcal{M}'}(f(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle), \dots, f(t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) \\
&\overset{\text{ind.hyp.}}{=} (F^n)^{\mathcal{M}'}(t_1^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle, \dots, t_n^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle) \\
&\overset{\text{def}}{=} t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle
\end{aligned}$$

□

Teorem 84. *Låt L vara ett lexikon, $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ isomorfa L-modeller, s en $\mathcal{M}$-tolkning och s' en $\mathcal{M}'$-tolkning så att $f : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ är en isomorfism och s och s' är konjugater med avseende på f. Då gäller för varje L-formel A:*

$$\mathcal{M} \models_s A \textit{ om och endast om } \mathcal{M}' \models_{s'} A.$$

Bevis. Antag att $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ är en isomorfism. Vi bevisar teoremet med induktion över formeln A för alla $\mathcal{M}$-tolkningar s och $\mathcal{M}'$-tolkningar s' som är konjugater med avseende på f.

I bassteget visar vi teoremet för atomära formler.

Antag att A är formeln $t = t'$ och s och s' är konjugater med avseende på f. Om $\mathcal{M} \models_s A$ så är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ och därmed $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$. Enligt Lemma 83 är då $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$. Alltså gäller $\mathcal{M}' \models_{s'} t = t'$. Omvänt om $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ så är $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$. Enligt Lemma 83 är då $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$. Eftersom f är injektiv gäller då $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ och därmed $\mathcal{M} \models_s t = t'$.

Fallet där A är formeln $R^n(t_1, \dots, t_n)$ lämnas som övningsuppgift åt läsaren.

I induktionssteget antar vi som induktionshypotes att $\mathcal{M} \models_s B$ om och endast om $\mathcal{M}' \models_{s'} B$ för alla s och s' som är konjugater med avseende på f. Vi antar också motsvarande egenskap för formeln C.

Om A är $\neg B$ och s och s' är konjugater med avseende på f så gäller $\mathcal{M} \models_s A$ enligt Tarskis sannningsdefinition om och endast om $\mathcal{M} \not\models_s B$. Vidare gäller detta enligt induktionshypotesen om och endast om $\mathcal{M}' \not\models_{s'} B$ dvs. om och endast om (Tarskis sanningsdefinition) $\mathcal{M}' \models_{s'} A$.

Om A är $B \wedge C$ och s och s' är konjugater med avseende på f och $\mathcal{M} \models_s A$ så gäller enligt Tarskis sanningsdefinition $\mathcal{M} \models_s B$ och $\mathcal{M} \models_s C$. Enligt induktionshypotesen gäller då $\mathcal{M}' \models_{s'} B$ och $\mathcal{M}' \models_{s'} C$ och igen enligt Tarskis sannignsdefinition $\mathcal{M}' \models_{s'} B \wedge C$. Den andra riktningen bevisas på motsvarande sätt.

Fallen där A är $B \vee C$, $B \to C$ och $B \leftrightarrow B$ lämnas som övningsuppgift åt läsaren.

Låt sedan A vara $\exists x B$ och s och s' konjugater med avseende på f. Om $\mathcal{M} \models_s A$ så finns det ett $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ så att $M \models_{s(a/x)} B$. Eftersom s och s' är konjugater med avseende på f gäller för alla variabler *förutom* x $f(s(a/x)(y)) = s'(y) = s'(f(a)/x)(y)$. För x gäller $f(s(a/x)(x)) = f(a) = s'(f(a)/x)(x)$. Alltså är $s(a/x)$ och $s'(f(a)/x)$ konjugater med avseedne på f. Enligt induktionshypotesen gäller då $\mathcal{M}' \models_{s'(f(a)/x)} B$ och eftersom $f(a) \in \mathrm{dom}(\mathcal{M}')$ så gäller $\mathcal{M}' \models_{s'} \exists x B$ dvs $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Å andra sidan, om $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ så finns det något $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M}')$ så att $\mathcal{M}' \models_{s'(b/x)} B$. Eftersom f är surjektiv finns det ett $b' \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ så att $f(b') = b$. Vidare är $s(b'/x)$ och $s'(f(b')/x) = s'(b/x)$ konjugater med avseende på f så enligt induktionshypotesen gäller $\mathcal{M} \models_{s(b'/x)} B$. Enligt Tarskis sanningsdefinition gäller då $\mathcal{M} \models_s A$.

Fallet där A är $\forall B$ lämnas som övningsuppgift åt läsaren. □

Korollarium 85. *Om $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ är isomorfa L-modeller och A är en L-sats så gäller*

$$\mathcal{M} \models A \text{ om och endast om } \mathcal{M}' \models A.$$

Bevis. Antag att $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ är en isomorfism och att $\mathcal{M} \models A$. Det här innebär att $\mathcal{M} \models_s A$ för alla $\mathcal{M}$-tolkninar s. Låt s' vara en godtycklig $\mathcal{M}'$-tolkning. Vi definierar en $\mathcal{M}$-tolkning s'' enligt $s''(x) = f^{-1}(s'(x))$ för varje variabel x (dethär är möjligt eftersom f är bijektiv). Då är s'' och s' konjugater med avseende på f så enligt föregående teorem gäller $\mathcal{M} \models_{s''} A$ om och endast om $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ och eftersom $\mathcal{M} \models_s A$ för varje $\mathcal{M}$-tolkning s så måste $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Eftersom s' var godtycklig gäller således $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ för varje $\mathcal{M}'$-tolkning s', dvs $\mathcal{M}' \models A$.

Om å andra sidan $\mathcal{M} \not\models A$ så finns det en $\mathcal{M}$-tolkning s så att $\mathcal{M} \not\models_s A$. Då kan vi definiera en $\mathcal{M}'$-tolkning s' enligt $s'(x) = f(s(x))$. Då är s och s' konjugater med avseende på f så $\mathcal{M}' \not\models_{s'} A$ och således $\mathcal{M}' \not\models A$. □

Korollariet bevisar att det inte går att skilja åt isomorfa modeller med hjälp av predikatlogiska satser. Ur logikens synpunkt är alla isomorfa modeller likadana. En naturlig följdfråga är ifall alla modeller som satisfierar samma satser är isomorfa. Svaret är negativt. Det går att bevisa att t.ex. de linjära ordningarna $(\mathbb{Q}, <)$ och $(\mathbb{R}, <)$ satisfierar samma satser (beviset bygger på sk. Ehrenfeucht-Fraïssé-spel), men eftersom $\mathbb{Q}$ är numrerbar och $\mathbb{R}$ inte så kan de inte vara isomorfa. Däremot är två ändliga linjära ordningar isomorfa om de satisfierar samma satser. Dethär beror på att vi då kan uttrycka hur många elementen är.