## 2.11 $n$-ställiga predikat och funktioner

Våra exempel på relationer hittills har begränsats till enställiga predikat $P_i$ och tvåställiga relationer $R_i$. Då vi utvidgar vårt lexikon till relationer med större ställighet behöver vi en metod att märka ut ställigheten på relationen. Vi löser problermet genom att beteckna $n$-ställiga relationssymboler med

$$R_0^n, R_1^n, \text{ osv.}$$

Då är tolkningen av $R_i^n$ i $\mathcal{M}$, $(R_i^n)^{\mathcal{M}}$ en $n$-ställig relation i $M = \text{dom}(\mathcal{M})$

$$(R_i^n)^{\mathcal{M}} \subseteq M^n.$$

Vi definierade atomära formler och deras satisfiering för $n$-ställiga relationer så det enda tillägg vi behöver göra är i identitetsaxiomen. Där tillägger vi axiomet:

- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \wedge R_i^n(x_1, \ldots, x_n)) \to R_i^n(y_1, \ldots y_n))$

Den största skillnaden får vi då vi tillåter funktionssymboler i lexikonet. Med hjälp av funktionssymboler kan vi inom logiken granska funktioner i våra modeller. Funktionerna kan vara enställiga, som t.ex. $x^{-1}$ och $\cos(x)$ eller flerställiga som t.ex. de linjära avbildningarna $2x + 3y - z$ och $x - y$.

För att kunna nämna funktioner i formlerna introducerar vi för varje $n > 0$ $n$-ställiga funktionssymboler

$$F_0^n, F_1^n, \ldots \text{ (i praktiken ofta } F, F', G, G', \ldots)$$

Då ett lexikon $L$ innehåller funktionssymboler måste varje $L$-modell $\mathcal{M}$ ha en tolkning av dem. Tolkningen av en $n$-ställig funktionssymbol $F_i^n$ är en (total) $n$-ställig funktion i $M$:

$$(F_i^n)^{\mathcal{M}} : M^n \to M.$$

Funktionssymbolernas inverkan på formlerna ligger i att de ger oss nya termer. Genom sammansatta funktioner ger varje funktionssymbol oss oändligt (numrerbart) många nya termer. Några exempel är

$$F_0^1(x),\ F_1^1(c_0),\ F_0^2(x, c_0),\ F_0^2(F_1^1(x), y), \ldots$$

Termer som inte innehåller variabler kallas *konstanttermer*. Förutom konstanter kan dessa även innehålla funktionssymboler, som t.ex. $F_0^2(c_0, c_1)$.

Termerna används såsom tidigare i atomära formler

- $t_1 = t_2$, t.ex. $F^1(x) = F_0^2(c_0, F_2^3(x, y, z))$
- $R_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, t.ex. $R_0^3(x, F_0^1(x), F_0^1(F_0^1(x)))$

För att veta när dessa satisfieras måste vi utvidga vår definition av värdet på en term:

1. Om $t = x_i$ så är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = x_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x_i)$.
2. Om $t = c_i$ så är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c_i^{\mathcal{M}}$.
3. Om $t = F_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ så är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle =$

$$F_i^n(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = (F_i^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle).$$

För att tolka en term $F(t_1, t_2)$ måste vi alltså först finna värdet av termerna $t_1$ och $t_2$ (induktiv definition). Det här ger oss två element, säg $a$ och $b$, i $M$. Sedan ser vi vilken funktion $F$ står för och finner den tvåställiga funktionen $F^{\mathcal{M}} : M^2 \to M$. Då är $F(t_1, t_2)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ helt enkelt värdet $F^{\mathcal{M}}(a, b)$, ett element i $M$.

**Exempel 77.** Låt $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, F^{\mathcal{M}}, G^{\mathcal{M}}, c_0^{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}})$ där $F^{\mathcal{M}}(m) = m+1$, $G^{\mathcal{M}}(m, n) = m+n$, $c_0^{\mathcal{M}} = 0$ och $c_1^{\mathcal{M}} = 1$. Vi vill avgöra om

$$\mathcal{M} \models_s F(c_1) = G(x, y)$$

då $s(x) = 0$ och $s(y) = 2$. Nu är

$$F(c_1)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = F^{\mathcal{M}}(c_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = F^{\mathcal{M}}(c_1^{\mathcal{M}}) = 1 + 1 = 2$$

och

$$G(x, y)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = G^{\mathcal{M}}(x^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, y^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = G^{\mathcal{M}}(s(x), s(y)) = 0 + 2 = 2.$$

Alltså är $F(c_1)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = G(x, y)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ och enligt Tarskis sanningsdefinition (för formler av formen $t = t'$) gäller

$$\mathcal{M} \models_s F(c_1) = G(x, y).$$

**Exempel 78.** Med en funktionssymbol $\circ$ i lexikonet kan vi t.ex. behandla gruppoperationer. Gruppaxiomen är då följande predikatlogiska formler (för enkelhets skull har vi också inkluderat en konstantsymbol $e$ för neutralelementet):

$$\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)) \\ \forall x(x \circ e = x \wedge e \circ x = x) \\ \forall x \exists y(x \circ y = e \wedge y \circ x = e) \end{array}$$

Nu är varje $\{\circ, e\}$-modell $G$ en grupp. Observera att slutenhetsaxiomet “för alla $a, b \in G$ gäller $a \circ b \in G$” följer av att $\circ$ är en funktionssymbol och måste tolkas som en total funktion i $G$.

**Exempel 79.** En annan klassisk struktur är $(\mathbb{N}, s)$ där $s$ är efterföljarfunktionen $s(n) = n + 1$. Ofta inkluderar man 0 som en konstant.

Strukturen har bl.a. följande egenskaper:

- $s(n) = s(m) \to n = m$,
- om $n \neq 0$ så finns ett $m$ så att $s(m) = n$.

I strukturen håller också det s.k. *induktionsschemat*: Om $A$ är en $\{s, 0\}$-formel så är

$$(A(0/x_0) \wedge \forall x_0(A \to A(s(x_0)/x_0))) \to \forall x_0 A$$

ett induktionsaxiom. Induktionsschemat består av alla induktionsaxiom (ett för varje $A$).

Med funktionssymboler i termerna måste vi vara på vår vakt vid substitutuion. Eftersom termer då kan innehålla flera variabler måste vi vara noggranna då vi kontrollerar om en term är fri för en variabel i en formel. Så är t.ex. termen $F(x, x)$ fri för $x$ i $\forall y R_0(x, y)$ men termen $F(x, y)$ är det inte eftersom $F(x, y)$ innehåller en variabel som skulle bli bunden vid substitutionen.

I semantiska träd innebär funktionssymbolerna att vi har fler termer att ta i beaktande vid tillämpning av nedbrytningsregler för kvantifikatorer. Så gäller det t.ex. i det semantiska beviset för $\forall x P(x) \to P(F(c))$ att substituera, inte $c$ utan $F(c)$ för $x$:

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall x P(x) \to P(F(c))) \checkmark \\
| \\
\forall x P(x) \\
| \\
\neg P(F(c)) \\
| \\
P(F(c)) \\
| \\
\times
\end{array}
$$

Funktionssymboler kräver också ett nytt identitetsaxiom:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n ((x_1 = y_1 \land \cdots \land x_n = y_n) \to F_i^n(x_1, \ldots, x_n) = F_i^n(y_1, \ldots y_n)).$$

Om vi sammanställer alla identitetsaxiom har vi:

1. $\forall x \; x = x$
2. $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$
3. $\forall x \forall y \forall z ((x = y \land y = z) \to x = z)$
4. $\forall x \forall y ((x = y \land P_n(x)) \to P_n(y))$
5. $\forall x \forall x' \forall y \forall y' ((x = y \land x' = y' \land R_n(x, x')) \to R_n(y, y'))$
6. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n ((x_1 = y_1 \land \cdots \land x_n = y_n \land R_i^n(x_1, \ldots, x_n)) \to R_i^n(y_1, \ldots y_n))$
7. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n ((x_1 = y_1 \land \cdots \land x_n = y_n) \to F_i^n(x_1, \ldots, x_n) = F_i^n(y_1, \ldots y_n))$