2.10 Semantiska träd

I satslogiken använde vi semantiska träd för att finna värderingar som satisfierar roten i trädet eller för att visa att sådana inte finns. På motsvarande sätt kan vi inom predikatlogiken använda semantiska träd för att finna modeller och tolkningar som satisfierar rotformeln eller för att visa att sådana inte finns.

I predikatlogiken innehåller semantiska träd både satser och öppna formler. Nedbrytningsreglerna för konnektiven är desamma som i satslogiken. För kvantifikatorerna behövs fyra nya regler:

- Allkvantifikatorn:

$$\begin{array}{c} \forall x A \\ | \\ A(t/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\forall x A \\ | \\ \neg A(c_i/x) \end{array}$$

  I den första regeln är t en godtycklig term som förekommer på samma gren som $\forall x A$, med begränsningen att t måste vara fri för x i A. I den andra regeln är c_i en ny konstant.

- Existenskvantifikatorn:

$$\begin{array}{c} \exists x A \\ | \\ A(c_i/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists x A \\ | \\ \neg A(t/x) \end{array}$$

  I den första regeln är c_i en ny konstant. I den andra regeln är t en godtycklig term som förekommer på samma gren som $\neg\exists x A$, med begränsningen att t är fri för x i A.

Då vi tillämpat reglerna

$$\begin{array}{c} \neg\forall x A \\ | \\ \neg A(c_i/x) \end{array} \qquad \text{eller} \qquad \begin{array}{c} \exists x A \\ | \\ A(c_i/x) \end{array}$$

kan vi markera dem som behandlade (med ✓). Vi har då introducerat nya konstanter som bevittnar formeln. De två andra kvantifikatorreglerna markeras aldrig. De måste tillämpas på nytt varje gång en ny term dyker upp på grenen. Om det inte finns konstanter på grenen kan man använda konstantsymbolen c_0.

I tabell 5 finns nedbrytningsreglerna för semantiska träd sammanställda.

Exempel 74. Med hjälp av semantiska träd kan vi konstruera modeller för givna satser (om sådana existerar). Vi använder ett semantiskt träd för att finna en modell för satsen $\exists x\forall y R(x,y) \wedge \neg\forall x R(x,x)$.

Konjunktion	$A \wedge B$ A B $\neg(A \wedge B)$ $\neg A \quad \neg B$
Disjunktion	$A \vee B$ $A \quad B$ $\neg(A \vee B)$ $\neg A$ $\neg B$
Negation	$\neg\neg A$ A A $\neg A$ $\times$ $\neg A$ A $\times$
Implikation	$A \to B$ $\neg A \quad B$ $\neg(A \to B)$ A $\neg B$
Ekvivalens	$A \leftrightarrow B$ $A \quad \neg A$ $B \quad \neg B$ $\neg(A \leftrightarrow B)$ $A \quad \neg A$ $\neg B \quad B$
Allkvantifikator	$\forall x A$ $A(t/x)$ $\neg \forall x A$ $\neg A(c_i/x)$
Existens-kvantifikator	$\exists x A$ $A(c_i/x)$ $\neg \exists x A$ $\neg A(t/x)$

Tabell 5: Nedbrytningsreglerna för semantiska träd i predikatlogiken

$$
\begin{array}{c}
\exists x \forall y R(x,y) \wedge \neg \forall x R(x,x) \checkmark \\
| \\
\exists x \forall y R(x,y) \checkmark \\
| \\
\neg \forall x R(x,x) \checkmark \\
| \\
\forall y R(c_0, y) \\
| \\
\neg R(c_1, c_1) \\
| \\
R(c_0, c_0) \\
| \\
R(c_0, c_1)
\end{array}
$$

Med hjälp av trädet kan vi konstruera modellen $\mathcal{M} = (M, R, c_0, c_1)$ där $M = \{0,1\}$, $R^{\mathcal{M}} = \{(0,0),(0,1)\}$, $c_0^{\mathcal{M}} = 0$ och $c_1^{\mathcal{M}} = 1$. Det är lätt att se att $\mathcal{M} \models \exists x \forall y R(x,y) \wedge \neg \forall x R(x,x)$.

Exempel 75. Semantiska träd är inte alltid det enklaste sättet att finna en modell. Vi vet (övning 9.7) att det finns en tvåelementsmodell $\mathcal{M}$ så att $\mathcal{M} \models \forall y \exists x R(x,y)$ men $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y R(x,y)$. Men försöker vi hitta en modell med ett semantiskt träd får vi:

$$
\begin{array}{c}
\forall y \exists x R(x,y) \wedge \neg \exists x \forall y R(x,y) \checkmark]] \\
\vert \\
\forall y \exists x R(x,y) \\
\vert \\
\neg \exists x \forall y R(x,y) \\
\vert \\
\exists x R(x,c_0) \checkmark \\
\vert \\
R(c_1,c_0) \\
\vert \\
\neg \forall y R(c_0,y) \checkmark \\
\vert \\
\neg R(c_0,c_2) \\
\vert \\
\exists x R(x,c_1) \checkmark \\
\vert \\
R(c_3,c_1) \\
\vert \\
\neg \forall y R(c_1,y) \checkmark \\
\vert \\
\neg R(c_1,c_4) \\
\vert \\
\exists x R(x,c_2) \checkmark \\
\vert \\
R(c_5,c_2) \\
\vert \\
\vdots
\end{array}
$$

Trädet hjälper oss visserligen att konstruera en modell $\mathcal{M}$ med

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{c_i : i \in \mathbb{N}\}, \\
R^{\mathcal{M}} = \{(c_{2i+1}, c_i) : i \in \mathbb{N}\}
\end{array}
$$

och det är enkelt att kontrollera att $\mathcal{M} \models \forall y \exists x R(x,y) \wedge \neg \exists x \forall y R(x,y)$, men det ger oss inte den enklaste möjliga modellen.

Styrkan i semantiska träd ligger i de fall då de *inte* ger en modell. Ett *semantiskt bevis* för en formel A är ett semantiskt träd för $\neg A$ där alla grenar är slutna. Det visar att det inte finns en modell $\mathcal{M}$ och en tolkning s så att $\mathcal{M} \models_s \neg A$, dvs. alla modeller och tolkningar måste satisfiera A. Metoden bygger på följande teorem:

Teorem 76. *Om en formel A har ett semantiskt bevis så är A valid.*

Bevis. Om A har ett semantiskt bevis så finns det ett semantiskt träd $\mathcal{P}$ med $\neg A$ som rot och där alla grenar är slutna. Om nu A inte är valid så finns det en modell $\mathcal{M}$ och en tolkning s så att $\mathcal{M} \models_s \neg A$. Idén i beviset är att med induktion finna en gren i $\mathcal{P}$ så att alla formler på grenen satisfieras av $\mathcal{M}$ och s. Eftersom alla grenar är slutna finns det en formel B så att både B och $\neg B$ finns på grenen och därmed måste $\mathcal{M} \models_s B \wedge \neg B$ vilket är omöjligt. Teoremet bevisas med induktion och vi ger nedan en skiss av beviset. Ett noggrant bevis skulle kräva mer detaljer i och med att vi i kvantifikatorstegen tvingas utvidga det ursprungliga lexikonet för $\mathcal{M}$.

I induktionens bassteg skall vi visa att $\mathcal{M}$ och s satisfierar roten på trädet, dvs $\neg A$, vilket stämmer på grund av vårt antagande.

I induktionssteget antar vi som induktionshypotes att vi har tagit oss neråt längs en gren till en formel B så att B och alla tidigare formler på grenen satisfieras av $\mathcal{M}$ och s. Vi antar också att vi inte är mitt i tillämpningen av en regel, dvs. B är inte den första av två formler som tillagts på grenen vid tillämpande av en nedbrytningsregel som ger två formler på en gren (t.ex. $B \wedge C$). Hur vi fortsätter neråt beror på vilken regel som tillämpats i trädet efter B.

- Konjunktion

$$\begin{array}{c} C \wedge D \\ | \\ C \\ | \\ D \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(C \wedge D) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg C \quad \neg D \end{array}$$

  Om följande formler har kommit från en tillämpning av regeln för konjunktion på formeln $C \wedge D$ så fortsätter grenen efter B med formlerna C och D. Eftersom vi tillämpat nedbrytningsregeln på formeln $C \wedge D$ måste den förekomma tidigare på grenen och enligt induktionshypotesen gäller då $\mathcal{M} \models_s C \wedge D$. Men då gäller både $\mathcal{M} \models_s C$ och $\mathcal{M} \models_s D$ och vi kan vandra två steg vidare på grenen.

  Om trädet förgrenar sig på grund av en tillämpning av regeln för en negation av en konjunktion på formeln $\neg(C \wedge D)$ så gäller som ovan att formeln i fråga finns på grenen och därmed gäller $\mathcal{M} \models_s \neg(C \wedge D)$. Då gäller $\mathcal{M} \not\models_s C \wedge D$ så antingen gäller $\mathcal{M} \not\models_s C$ eller $\mathcal{M} \not\models_s D$, dvs. $\mathcal{M} \models_s \neg C$ eller $\mathcal{M} \models_s \neg D$. Beroende på vilkendera formeln som satisfieras väljer vi den vänstra eller den högra förgreningen och fortsätter ett steg vidare.

- De övriga konnektiven $(\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg)$ lämnas åt läsaren.

- Allkvantifikator

$$\begin{array}{c} \forall x C \\ | \\ C(t/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\forall x C \\ | \\ \neg C(c_i/x) \end{array}$$

  Om följande formel på grenen har kommit från en tillämpning av regeln för $\forall x C$ och nästa formel är $C(t/x)$ så gäller enligt induktionshypotesen $\mathcal{M} \models_s \forall x C$. Om tolkningen av t är a så gäller $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} C$ och enligt substitutionslemmat $\mathcal{M} \models_s C(t/x)$. Om t ännu inte har en tolkning i $\mathcal{M}$ kan vi fritt välja den och fortfarande gäller $\mathcal{M} \models_s C(t/x)$. Således kan vi gå ett steg vidare i trädet.

  Om följande formel på grenen har kommit från en tillämpning av regeln för $\neg\forall x C$ och nästa formel är $\neg C(c_i/x)$ så gäller enligt induktionshypotesen $\mathcal{M} \models_s \neg\forall x C$. Det finns då ett element a i M så att $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} \neg C$. Eftersom c_i är en ny konstantsymbol har den ännu ingen tolkning i $\mathcal{M}$ så vi kan välja $c_i^{\mathcal{M}} = a$. Då gäller enligt substitutionslemmat $\mathcal{M} \models_s \neg C(c_i/x)$ och vi kommer ett steg vidare i trädet.

- Existenskvantifikatorreglerna behandlas på motsvarande sätt.

Eftersom vi antog att alla grenar i $\mathcal{P}$ är slutna, måste $\mathcal{P}$ vara ändligt. Således når vi till slut ändan av en gren (med ett $\times$) och måste ha stött på en kontradiktion på vägen. $\square$