2 Predikatlogik

Betrakta följande slutledning:

Alla katter är svarta.
Knutte är en katt.
———
Alltså är Knutte svart.

Slutledningen är uppenbarligen giltig. Men om vi försöker formalisera den i satslogik får vi slutledningen

$$\frac{\begin{array}{l} p_0 \\ p_1 \end{array}}{p_2}$$

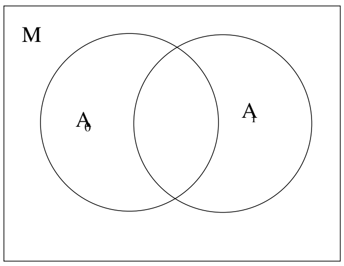
Den här slutledningen är inte satslogiskt giltig, eftersom $(p_0 \wedge p_1) \to p_2$ inte är en tautologi. Problemet är att satslogiken bara "ser" satser, inte objekten som satserna talar om.

Predikatlogiken ger oss en möjlighet att tala om objekt. Det gör vi med *variabler*. Då satslogiken tolkas genom att ge ett sanningsvärde åt de atomära satserna går predikatlogiksens semantik ut på att ge en identitet åt variablerna. Vad menar vi med variabeln x? Olika saker i olika fall, men det gemensamma för alla tolkningar är att de görs inom en *modell*.

2.1 Modeller

En modell är en mängd med någon form av struktur. Vi börjar med några exempel innan vi ger den formella definitionen.

En av de enklaste formerna av modeller bygger på enställiga *predikat*. Då består en modell $\mathcal{M}$ av en icke-tom *domän* M samt delmängder till M, kallade *predikat*. Predikaten kan vi beteckna $A_0, A_1, \ldots$. Ett predikat delar upp domänen i två delar: predikatet och dess komplement, två predikat delar upp domänen i fyra delar osv.



Figur 2: En modell med två enställiga predikat

Exempel 34. Med enställiga predikat kan vi granska samlingar av objekt med olika egenskaper. Låt t.ex. domänen M vara en samling träklot. A_0 består av de betsade kloten, A_1 av de lackade. Nu kan vår modell skilja på betsade/obetsade och lackade/olackade klot:

$A_0 \cap A_1$ består av betsade lackade klot.
$(M \setminus A_0) \cap A_1$ består av obetsade lackade klot.
$A_0 \cap (M \setminus A_1)$ består av betsade olackade klot.
$(M \setminus A_0) \cap (M \setminus A_1)$ består av obetsade olackade klot.

Beroende på vår samling klot kan endel (men inte alla) av mängderna ovan vara tomma.

Flerställiga predikat kallas oftast relationer. Speciellt vanliga inom matematiken är tvåställiga relationer. De består av par av element från en given domän.

Exempel 35. Linjära ordningar är tvåställiga relationer som uppfyller kraven:

1. (Reflexivitet) $a \leq a$ för alla a,
2. (Antisymmetri) om $a \leq b$ och $b \leq a$ så är $a = b$,
3. (Transitivitet) om $a \leq b$ och $b \leq c$ så är $a \leq c$,
4. (Totalitet) för alla a och b gäller antingen $a \leq b$ eller $b \leq a$.

Nu bildar t.ex. de naturliga talen (med sin vanliga ordning) en modell. Domänen är då mängden $\mathbb{N}$ och relationen $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$.

Exempel 36. En *graf* är består av en samling noder (eller hörn) med bågar (eller kanter) mellan dem. Ett exempel på två grafer ses i Figur 3. Då vi granskar en graf som en modell består domänen av noderna och relationen utgörs av de nodpar mellan vilka det finns en båge.

Figur 3: Två grafer

Grafer används för att studera olika sorters nätverk (telekommunikation, vägar), språkliga strukturer inom lingvistiken, molekyelmodeller inom kemin, osv.

Exempel 37. Vi kan också uttrycka vardagliga fenomen med modeller. Låt domänen M vara mängden av alla människor. Vi kan då definiera relationer som

$$\begin{gathered} Syskon = \{(x, y) \in M^2 | x \text{ och } y \text{ är syskon}\} \\ Far = \{(x, y) \in M^2 | x \text{ är far till } y\} \\ Mor = \{(x, y) \in M^2 | x \text{ är mor till } y\} \end{gathered}$$

Vi kan också ha funktioner och konstanter i våra modeller. Exempel på modeller inkluderar således t.ex. strukturer som grupper, ringar och kroppar från algebran.

Vilken form av struktur modellen har bestäms av modellens *lexikon* (eller vokabulär). Ett lexikon består av

- predikatsymboler (en- eller flerställiga) $P_0, P_1, \ldots$ eller $R_0, R_1, \ldots$
- funktionssymboler $f_o, f_1, \ldots$
- konstantsymboler $c_0, c_1, \ldots$

Vi koncentrerar oss för tillfället på modeller med bara en- och tvåställiga predikat samt konstanter. I praktiken använder vi ofta andra namn som predikat- och konstantsymboler.

Nu kan vi ge en formell definition av en modell:

Definition 38. En *modell* $\mathcal{M}$ för ett lexikon L består av

- en icke-tom mängd M kallad modellens *domän*

- ett enställigt predikat $P^{\mathcal{M}} \subset M$ för varje enställig predikatsymbol $P \in L$
- ett n-ställigt predikat $R^{\mathcal{M}} \subset M^n$ för varje n-ställig predikatsymbol $R \in L$
- ett element $c^{\mathcal{M}} \in M$ för varje konstantsymbol $c \in L$
- en n-ställig funktion $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$ för varje n-ställig funktionssymbol $f \in L$

Mängden $P^{\mathcal{M}} \in M$ kallas *tolkningen* av symbolen P i $\mathcal{M}$. Olika modeller för samma lexikon har samma symboler (t.ex. P, R) men olika tolkningar för dem. Modeller skrivs ofta ut som följder bestående av domänen och tolkningarna för de olika symbolerna i lexikonet.

Lexikon	Modell
P	$\mathcal{M} = (M, P^{\mathcal{M}})$
P_0, P_1, R_0, c_0	$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, P_1^{\mathcal{M}}, R_0^{\mathcal{M}}, c_0^{\mathcal{M}})$
P_0, R_0, f_0, c_0, c_1	$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, R_0^{\mathcal{M}}, f_0^{\mathcal{M}}, c_0^{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}})$
osv.	