1.5 Sundhet och fullständighet

Att den naturliga deduktionen är *sund* innebär att varje formel som kan nås med naturlig deduktion från en mängd premisser är en satslogisk konsekvens av premisserna. Vi kan alltså inte konstruera en härledning vars slutsatser inte skulle stämma.

Teorem 20 (Satslogikens sundhetsteorem)**.** *Om $\mathcal{S}$ är en mängd satslogiska formler och $\mathcal{S} \vdash A$ så $\mathcal{S} \Rightarrow A$.*

Bevis. Vi bevisar med induktion över strukturen av en härledning i naturlig deduktion att ifall $\mathcal{P}$ är en härledning, vars premisser finns i $\mathcal{S}$ och vars slutsats är A så stämmer $\mathcal{S} \Rightarrow A$, dvs. varje värdering v som satisfierar $\mathcal{S}$ satisfierar också A.

1. Om $\mathcal{P}$ är den triviala deduktionen A så är A en premiss. Alltså måste varje värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{P}$ satisfiera A.

2. Antag som induktionshypotes att deduktionerna $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ och $\begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}$ är sunda. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$ och låt v vara en värdering som satisfierar alla premisser till $\mathcal{R}$. v satisfierar då premisserna till $\mathcal{P}$ och $\mathcal{Q}$ så enligt induktionshypotesen har vi $v(A) = 1$ och $v(B) = 1$. Enligt sanningsdefinitionen för $\wedge$ har vi då $v(A \wedge B) = 1$ så $\mathcal{R}$ är sund.

3. Antag att deduktionen $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{matrix}$ är sund. Låt $\mathcal{Q}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{matrix}}{A}$ och låt v vara en värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{Q}$. v satisfierar då premisserna till $\mathcal{P}$ så enligt induktionshypotesen är $v(A \wedge B) = 1$. Men härav följer $v(A) = 1$, så $\mathcal{Q}$ är sund. På motsvarande sätt ser vi att $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{matrix}}{B}$ är sund.

4. Antag att deduktionen $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ är sund. Låt $\mathcal{Q}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{A \vee B}$ och låt v vara en värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{Q}$. Då satisfierar v premisserna till $\mathcal{P}$ så enligt induktionshypotesen är $v(A) = 1$. Då är också $v(A \vee B) = 1$ så $\mathcal{Q}$ är sund. På motsvarande sätt ser vi att $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{B \vee A}$ är sund.

5. Antag att deduktionerna $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{matrix}$, $\begin{matrix}A\\ \mathcal{Q}\\ C\end{matrix}$ och $\begin{matrix}B\\ \mathcal{Q}'\\ C\end{matrix}$ är sunda. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A]\\ \mathcal{Q}\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \mathcal{Q}'\\ C\end{matrix}}{C}$$

   och låt v vara en värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{R}$. Eftersom v då satisfierar premisserna till $\mathcal{P}$ är $v(A \vee B) = 1$ enligt induktionshypotesen. Vi har då två möjligheter: antingen är $v(A) = 1$ eller så är $v(A) = 0$. Om $v(A) = 1$ så satisfierar v premisserna till $\mathcal{Q}$ eftersom den i varje fall satisfierar alla de övriga premisserna till $\mathcal{Q}$ än A. Enligt induktionshypotesen har vi då $v(C) = 1$. Å andra sidan om $v(A) = 0$ så måste $v(B) = 1$ eftersom $v(A \vee B) = 1$. I så fall satisfierar v premisserna till $\mathcal{Q}'$ och enligt induktionshypotesen är då $v(C) = 1$.

6.–9. Fallen med implikation och ekvivalens lämnas som övningsuppgift åt läsaren.

10. Antag att deduktionen $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{array}$ är sund. Låt $\mathcal{Q}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{array}}{A}$ och låt v vara en värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{Q}$. v satisfierar då premisserna till $\mathcal{P}$ så $v(\neg\neg A) = 1$. Men då är $v(A) = 1$.

11. Antag att deduktionen $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{array}$ är sund. Låt $\mathcal{Q}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{array}}{\neg A}$ och låt v vara en värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{Q}$. Om v nu skulle satisfiera A, skulle den satisfiera premisserna till $\mathcal{P}$. Men då skulle $v(B \wedge \neg B) = 1$ vilket är omöjligt eftersom ingen värdering kan satisfiera en kontradiktion. Därför måste $v(A)$ vara 0 och således är $v(\neg A) = 1$.

□

Sundhetsteoremet har följande omedelbara korollarium:

Korollarium 21. *Om $\mathcal{S}$ är en mängd satslogiska formler och $\mathcal{S} \not\models A$ så $\mathcal{S} \nvdash A$.*

När vi skall visa att något går att härleda kan vi konstruera en härledning. Sundhetssatsen ger oss verktyg att bevisa när något *inte* går att härleda.

Exempel 22. Vi visar att $\{(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2, p_0\} \nvdash p_2$. Enligt Korollarium 21 räcer det att bevisa att $\{(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2, p_0\} \not\models p_2$. För det här räcker det att hitta en värdering som satisfierar $\{(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2, p_0\}$ men inte p_2.

Låt v vara värderingen

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{om } i = 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Nu är $v(p_0 \leftrightarrow p_1) = 0 = v(p_2)$ så $v((p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2) = v(p_0) = 1$ men $v(p_2) = 0$.

Vi ger som följande en skiss över satslogikens fullständighetsteorem enligt vilket alla satslogiska konsekvenser kan härledas. Många detaljer lämnas åt läsaren. För ett noggrannare bevis hänvisas till [?] eller kursen "Matemaattinen logiikka".

Definition 23. En formelmängd $\mathcal{S}$ är *satslogiskt inkonsistent* om det finns en formel A så att $\mathcal{S} \vdash A \wedge \neg A$. I motsatt fall är $\mathcal{S}$ *satslogiskt konsistent.*

Lemma 24. *Följande villkor är ekvivalenta:*

1. *S är inkonsistent.*
2. *Det finns en formel A så att $\mathcal{S} \vdash A$ och $\mathcal{S} \vdash \neg A$.*
3. *För alla formler A stämmer $\mathcal{S} \vdash A$.*

Bevis. Beviset lämnas som övningsuppgift åt läsaren. □

Lemma 25. *Om $\mathcal{S}$ är en formelmängd och A en satslogisk formel så är följande villkor ekvivalenta:*

1. *$\mathcal{S} \cup \{\neg A\}$ är inkonsistent.*
2. *$\mathcal{S} \vdash A$.*

Bevis. Beviset lämnas som övningsuppgift åt läsaren. □

Definition 26. Formelmängden $\mathcal{S}$ är *maximalkonsistent* om den är konsistent och varje $\mathcal{S}' \supsetneq \mathcal{S}$ är inkonsistent.

Lemma 27 (Lindenbaums lemma)**.** *Om $\mathcal{S}$ är en konsistent formelmängd så har $\mathcal{S}$ en maximalkonsistent extension.*

Bevis. (*Skiss*) Idén i beviset går ut på att induktivt bygga upp extensionen. Mängden av satslogiska formler är numrerbar så vi kan anta att alla satslogiska formler finns uppräknade i mängden $\{A_0, A_1, \dots\}$. Vi börjar från $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$. Sedan går vi igenom alla formler och definierar

$$\mathcal{S}_{n+1} = \begin{cases} \mathcal{S}_n \cup \{A_n\} & \text{om } \mathcal{S}_n \cup \{A_n\} \text{ är konsistent,} \\ \mathcal{S}_n & \text{annars.} \end{cases}$$

Sedan bevisar vi att

- varje $\mathcal{S}_n$ är konsistent,
- mängden $\mathcal{S}' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$ är konsistent,
- mängden $\mathcal{S}'$ är maximalkonsistent och $\mathcal{S}' \supseteq \mathcal{S}$.

□

Teorem 28 (Satslogikens fullständighetsteorem)**.** *Om $\mathcal{S}$ är en mängd satslogiska formler och $\mathcal{S} \Rightarrow A$ så $\mathcal{S} \vdash A$.*

Bevis. (*Skiss*) Antag att $\mathcal{S} \nvdash A$. Enligt Lemma 25 är $\mathcal{S} \cup \{\neg A\}$ konsistent så enligt Lindenbaums lemma finns det en maximalkonsistent mängd $\mathcal{S}' \supseteq \mathcal{S} \cup \{\neg A\}$. Definiera en värdering v så att $v(p_i) = 1$ om och endast om $p_i \in \mathcal{S}'$.

Bevisa sedan med strukturell induktion att $v(B) = 1$ om och endast om $B \in \mathcal{S}'$. Men då är $v(B) = 1$ för alla $B \in \mathcal{S}$ men $v(A) = 0$ (eftersom $v(\neg A) = 1$, så $\mathcal{S} \not\Rightarrow A$. □

Genom att kombinera sundhets- och fullständighetssatserna har vi nu:

Korollarium 29. *$\mathcal{S} \vdash A$ om och endast om $\mathcal{S} \Rightarrow A$.*