1.4 Naturlig deduktion

Med sanningstabeller (eller andra semantiska metoder) kan vi visa att en given slutsats stämmer. T.ex. är slutledningen

> Om det regnar eller snöar så blir skorna blöta.
> Skorna är inte blöta.
> Alltså snöar det inte.

riktig eftersom satsen $(((p_0 \vee p_1) \to p_2) \wedge \neg p_2) \to \neg p_1$ är en tautologi. Vi säger att en sats B är en *satslogisk konsekvens* av A, $A \Rightarrow B$ om $A \to B$ är en tautologi eller, ekvivalent uttryckt, om varje värdering som gör A sann också nödvändigtvis gör B sann.

Med semantiska metoder kan vi kontrollera att en given sats är en tautologi. Ett annat angreppsätt är ett *syntaktiskt bevis* där vi härleder satser från givna satser. En *härledning*, också kallad *deduktion* eller *formellt bevis*, är generellt sett en följd av formler konstruerad enligt specifika regler. Styrkan i formella bevismetoder är att de gör bevisen mekaniskt verifierbara. De ger också metoder att studera begränsningarna i bevisföring.

Den härledning vi här presenterar kallas naturlig deduktion. "Naturlig" betyder här att den försöker imitera det sett vi vanligtvis resonerar. Den är emellertid långt mer pedantisk än de informella bevis en matematiker använder sig av till vardags. Den naturliga deduktionen bygger på introduktions- och elimineringsregler för konnektiven. Det finns andra härledningssystem med andra regler, t.ex. Hilberts system som bygger på färre regler men där härledningarna är mindre intuitiva.

Ett enkelt exempel på en deduktionsregel är:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B} \wedge \mathrm{I}$$

Bevisen är uppbyggda så att varje vågrätt streck är ett steg i härledningen, premisserna står ovanför strecket och slutsatsen nedan. Höger om strecket anges vilken deduktionregel som använts. "$\wedge$ I" innebär introduktion av konjunktion och det vårt bevis ovan säger är att om A och B är sanna, så är $A \wedge B$ det också. Genom att upprepa deduktionssteget kan vi härleda t.ex. $(A \wedge B) \wedge (B \wedge A)$ från premisserna A och B:

$$\frac{\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B} \wedge \mathrm{I} \qquad \dfrac{B \qquad A}{B \wedge A} \wedge \mathrm{I}}{(A \wedge B) \wedge (B \wedge A)} \wedge \mathrm{I}$$

I Tabell 2 finns deduktionsreglerna sammanställda. Reglerna är valda så att de bibehåller sanningen i formlerna under alla värderingar. Genom att kombinera dem och använda slutsatserna i tidigare deduktioner som premisser i följande steg kan vi bygga upp träd av deduktionssteg. De här är våra deduktioner. Om det finns en härledning av formeln B från premisserna $A_0, \ldots A_{n-1}$, skriver vi $\{A_0 \ldots A_{n-1}\} \vdash B$. Ifall mängden premisser är tom skriver vi kort $\vdash B$.

Då vi använder reglerna $\vee$ E, $\to$ I, $\leftrightarrow$ I och $\neg$ I får vi stryka premisser, vilket vi indikerar med att sätta klammer runt premisserna. Samtidigt markerar vi när vi strukit dem genom att markera klamrarna och regeln med samma nummer. Möjligheten att stryka premisser innebär att vi kan göra tillfälliga antaganden som sedan stryks från den slutliga deduktionen. Vi illustrerar dethär med regeln $\vee$ E:

Exempel 15. Vi visar att $\{A \vee B, A \to C, B \to C\} \vdash C$. Vi kan tänka oss att härledningen fortlöper som ett bevis med två fall: antingen är A sann eller så är B sann. Så anta för ett ögonblick att A är sann. Då kan vi anta A och $A \to C$ (eftersom den senare hör till premisserna) och deducera:

Konnektiv	Introduktion	Elimination
Konjunktion	$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\text{ I}$	$\dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\text{ E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge\text{ E}$
Disjunktion	$\dfrac{A}{A \vee B}\,\vee\text{ I} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\,\vee\text{ I}$	$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,\vee\text{ E}$
Implikation	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\,\to\text{ I}$	$\dfrac{A \to B \qquad A}{B}\,\to\text{ E}$
Ekvivalens	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ A\end{matrix}}{A \leftrightarrow B}\,\leftrightarrow\text{ I}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B \qquad A}{B}\,\leftrightarrow\text{ E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \qquad B}{A}\,\leftrightarrow\text{ E}$
Negation	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}\,\neg\text{ I}$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}\,\neg\text{ E}$

Tabell 2: Satslogikens deduktionsregler

$$\dfrac{A \to C \qquad A}{C}\,\to\text{ E}$$

Å andra sidan om B är sann, kan vi deducera

$$\dfrac{B \to C \qquad B}{C}\,\to\text{ E}$$

Nu vet vi inte om A eller B är sann men enligt premisserna är $A \vee B$ sann, så någondera måste vara det, och i vilket fall som helst måste C vara sann på basen av deduktionerna ovan. Vi behöver alltså inte veta vilkendera som är sann (utan kan stryka A och B) bara vi vet att $A \vee B$ stämmer. Således får vi deduktionen:

$$\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{A \to C \qquad [A]^1}{C}\,\to\text{ E} \qquad \dfrac{B \to C \qquad [B]^1}{C}\,\to\text{ E}}{C}\,\vee\text{ E, 1}$$

Reglerna $\vee$ E, $\to$ I, $\leftrightarrow$ I och $\neg$ I *tillåter* att vi stryker premisser men de *förutsätter* det inte. Vi kan därför använda reglerna i förkortad form i fall där det inte finns något att stryka:

$$\dfrac{B}{A \to B}\,\to\text{ I}$$

Märk väl att eftersom naturlig deduktion är en syntaktisk och inte en semantisk bevismetod, så får vi inte ändra syntaxen i våra premisser. Således kan vi behöva bevis av intuitivt triviala påståenden, som t.ex. $\{A \wedge B\} \vdash B \wedge A$. Regeln $\neg$ I förutsätter också att kontradiktionen är av formen $B \wedge \neg B$, exempelvis $\neg B \wedge B$ duger inte (men nog $\neg B \wedge \neg\neg B$).

Vi illustrerar användningen av naturlig deduktion med att härleda följande delar av de Morgans lagar:

Exempel 16. Vi visar $\{\neg A \vee \neg B\} \vdash \neg(A \wedge B)$.

$$\dfrac{\neg A \vee \neg B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{A}{\scriptstyle \wedge\,\mathrm{E}} \qquad [\neg A]^3}{A \wedge \neg A}{\scriptstyle \wedge\,\mathrm{I}}}{\neg(A \wedge B)}{\scriptstyle \neg\,\mathrm{I},\,1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{B}{\scriptstyle \wedge\,\mathrm{E}} \qquad [\neg B]^3}{B \wedge \neg B}{\scriptstyle \wedge\,\mathrm{I}}}{\neg(A \wedge B)}{\scriptstyle \neg\,\mathrm{I},\,2}}{\neg(A \wedge B)}{\scriptstyle \vee\,\mathrm{E},\,3}$$

Exempel 17. Vi visar $\{\neg(A \wedge B)\} \vdash \neg A \vee \neg B$.

Idén i det här beviset är följande: Vi märker att om vi antar både A och B så kan vi via motsägelsebevis $(\neg I)$ härleda $\neg A$ och samtidigt stryka A. Därifrån är det lätt att nå $\neg A \vee \neg B$. Men B får vi inte struket. Å andra sidan kan vi från $\neg B$ enkelt härleda $\neg A \vee \neg B$. Man skulle ju tycka att $B \vee \neg B$ stämmer, så vi antar att vi har en härledning $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ B \vee \neg B\end{array}$ och deducerar:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ B \vee \neg B\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [B]^2}{A \wedge B}{\scriptstyle \wedge\,\mathrm{I}} \qquad \neg(A \wedge B)}{(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)}{\scriptstyle \wedge\,\mathrm{I}}}{\neg A}{\scriptstyle \neg\,\mathrm{I},\,1}}{\neg A \vee \neg B}{\scriptstyle \vee\,\mathrm{I}} \qquad \dfrac{[\neg B]^2}{\neg A \vee \neg B}{\scriptstyle \vee\,\mathrm{I}}}{\neg A \vee \neg B}{\scriptstyle \vee\,\mathrm{E},\,2}$$

Nu återstår bara att visa att $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ B \vee \neg B\end{array}$ finns. Den ser ut så här:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^1}{B \vee \neg B}{\scriptstyle \vee\,\mathrm{I}} \qquad [\neg(B \vee \neg B)]^2}{(B \vee \neg B) \wedge \neg(B \vee \neg B)}{\scriptstyle \wedge\,\mathrm{I}}}{\neg B}{\scriptstyle \neg\,\mathrm{I},\,1}}{B \vee \neg B}{\scriptstyle \vee\,\mathrm{I}} \qquad [\neg(B \vee \neg B)]^2}{(B \vee \neg B) \wedge \neg(B \vee \neg B)}{\scriptstyle \wedge\,\mathrm{I}}}{\neg\neg(B \vee \neg B)}{\scriptstyle \neg\,\mathrm{I},\,2}}{B \vee \neg B}{\scriptstyle \neg\,\mathrm{E}}$$

Lägg märke till att vi vid den andra elimineringen får eliminera *alla* förekomster av $\neg(B \vee \neg B)$ i härledningen.

Vi har nu huvuddelarna i ett bevis av den ena av de Morgans lagar. Vi sammanställer dem:

Exempel 18. Visa att $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

Vi betecknar med $\begin{array}{c}\neg(A \wedge B)\\ \mathcal{Q}\\ \neg A \vee \neg B\end{array}$ härledningen i Exempel 17 och med $\begin{array}{c}\neg A \vee \neg B\\ \mathcal{R}\\ \neg(A \wedge B)\end{array}$ härledningen i Exempel 16. Då har vi

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(A \wedge B)]^1\\ \mathcal{Q}\\ \neg A \vee \neg B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg A \vee \neg B]^1\\ \mathcal{R}\\ \neg(A \wedge B)\end{array}}{\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)}{\scriptstyle \leftrightarrow\,\mathrm{I},\,1}$$

Vi har sett hur naturlig deduktion ser ut i praktiken. För att matematiskt exakt kunna bevisa något om den behöver vi en formell definition.

Definition 19. Mängden av deduktioner $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ definieras enligt följande:

1. Den triviala deduktionen A (där A är en satslogisk formel) är en deduktion. I det här fallet är $\mathcal{P} = \emptyset$ och A är samtidigt både premiss och slutsats.

2. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ och $\begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}$ är deduktioner så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$ en deduktion.

3. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{matrix}$ är en deduktion så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{matrix}}{A}$ och $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{matrix}}{B}$ deduktioner.

4. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ är en deduktion så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{A \vee B}$ och $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{B \vee A}$ deduktioner.

5. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{matrix}$, $\begin{matrix}A\\ \mathcal{Q}\\ C\end{matrix}$ och $\begin{matrix}B\\ \mathcal{R}\\ C\end{matrix}$ är deduktioner så är

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \mathcal{Q}\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \mathcal{R}\\ C\end{matrix}}{C}$$

   en deduktion

6. Om $\begin{matrix}A\\ \mathcal{P}\\ B\end{matrix}$ är en deduktion så är $\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathcal{P}\\ B\end{matrix}}{A \to B}$ en deduktion.

7. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \to B\end{matrix}$ och $\begin{matrix}\mathcal{Q}\\ A\end{matrix}$ är deduktioner så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \to B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{Q}\\ A\end{matrix}}{B}$ en deduktion.

8. Om $\begin{matrix}A\\ \mathcal{P}\\ B\end{matrix}$ och $\begin{matrix}B\\ \mathcal{Q}\\ A\end{matrix}$ är deduktioner så är $\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathcal{P}\\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \mathcal{Q}\\ A\end{matrix}}{A \leftrightarrow B}$ en deduktion.

9. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \leftrightarrow B\end{matrix}$, $\begin{matrix}\mathcal{Q}\\ A\end{matrix}$ och $\begin{matrix}\mathcal{R}\\ B\end{matrix}$ är deduktioner så är

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \leftrightarrow B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{Q}\\ A\end{matrix}}{B} \text{ och } \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \leftrightarrow B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{R}\\ B\end{matrix}}{A}$$

   deduktioner.

10. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{matrix}$ är en deduktion så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{matrix}}{A}$ en deduktion.

11. om $\begin{matrix}A\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{matrix}$ är en deduktion så är $\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}$ en deduktion.