1.3 Sanningsfunktioner

Vi kan nu konstruera sanningsvärdetabeller för godtyckliga formler. En naturlig följdfråga är: Kan vi konstruera formler för godtyckliga sanningsvärdetabeller? Till exempel kan vi fråga: Finns det en formel A, uppbyggd av satssymbolerna p_0, p_1 och p_2, med följande sanningsvärdetabell:

p_0	p_1	p_2	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

För att bättre kunna studera frågan definierar vi begreppet *sanningsfunktion*.

Definition 12. En *sanningsfunktion* är en funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, där $n \in \mathbb{N}$.

Ett exempel på en sanningsfunktion är:

x	y	$f(x,y)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Sanningsfunktioner är generaliseringar av de vanliga konnektiven $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ och $\leftrightarrow$. Granskar vi 2-ställiga sanningsfunktioner ser vi att det finns allt som allt $2^4 = 16$ av dem. De finns presenterade i följande tabell.

x	y				$\neg$					$\wedge$	$\leftrightarrow$		$\to$			$\vee$	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Vi känner enkelt igen konnektiven $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ och $\leftrightarrow$ men ser att det också finns en hel mängd andra sanningsfunktioner. En del av dem motsvarar etablerade logiska grindar inom digitaltekniken, som t.ex. Sheffers streck (NAND):

A	B	$A \mid B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Varje satslogisk formel bestämmer en sanningsfunktion:

Definition 13. Om A är en formel som innehåller enbart satssymbolerna $p_0, \ldots p_{n-1}$ så kan vi definiera den n-ställiga sanningsfunktionen för A, f_A, enligt

$$f_A(x_0, \ldots, x_{n-1}) = v(A), \text{ där } v(p_i) = \begin{cases} x_i & \text{om } i < n \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vår ursprungliga fråga kan nu ställas som: Finns det för varje n-ställig sanningsfunktion f en formel A så att $f_A = f$? Det visar sig inte bara att detta stämmer utan att det finns ett mekaninkt sätt att konstruera formeln.

Lemma 14. *Om f är en n-ställig sanningsfunktion ($n \geq 1$) så finns det en satslogisk formel som innehåller bara satssymbolerna $p_0, \ldots p_{n-1}$ och konnektiven $\neg$, $\wedge$ och $\vee$ och för vilken $f_A = f$.*

Bevis. Låt f vara en n-ställig sanningsfunktion, $n \geq 1$. Om f är den konstanta nollfunktionen (dvs. alltid får värdet 0) väljer vi t.ex. $A = p_0 \wedge \neg p_0$. Så vi kan anta att f får värdet 1 åtminstone för en n-tipel $(x_0, \ldots x_{n-1})$. För varje n-tipel $\bar{x} = (x_0, \ldots x_{n-1})$ definierar vi en formel

$$A_{\bar{x}} = (q_0 \wedge \ldots q_{n-1}), \quad \text{där } q_i = \begin{cases} p_i & \text{om } x_i = 1 \\ \neg p_i & \text{om } x_i = 0. \end{cases}$$

Idén med $A_{\bar{x}}$ är att formeln har sanningsvärdet 1 för exakt de värderingar som ger satssymbolerna $p_0, \ldots p_{n-1}$ sanningsvärdena i n-tipeln $\bar{x}$.

Låt $X = \{\bar{x} \in \{0,1\}^n | f(\bar{x}) = 1\}$. Eftersom vi antog att $f(\bar{x}) = 1$ för åtminstone en n-tipel $\bar{x}$, så är X inte tom och vi kan låta A vara disjunktionen av de $A_{\bar{x}}$ där $\bar{x} \in X$.

Det återstår att visa att $f_A = f$. Så låt $(d_0, \ldots, d_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ och låt v vara sanningsfunktionen där

$$v(p_i) = \begin{cases} d_i & \text{om } i < n, \\ 1 & \text{annars,} \end{cases}$$

dvs. v är sanningsfunktionen från Definition 13 för vilken $f_A(d_0, \ldots, d_{n-1}) = v(A)$.

Om nu $f_A(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$, dvs. $v(A) = 1$, så måste en av disjunkterna i A vara sann. Alltså är $v(A_{\bar{x}}) = 1$ för någon $\bar{x} \in X$. Men formlerna $A_{\bar{x}}$ är definierade så att den enda av dem som är sann under v är $A_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}$. Alltså måste vi ha $(d_0, \ldots, d_{n-1}) \in X$ vilket på basen av hur X var definierad ger $f(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$.

Å andra sidan, om $f(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$ så är $(d_0, \ldots, d_{n-1}) \in X$. Då är $A_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}$ en av disjunkterna i A. $A_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}$ är sann exakt för värderingar som ger p_i sanningsvärdet d_i, alltså är $v(A_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}) = 1$ och enligt disjunktionens sanningsdefinition $v(A) = 1$. Det här i sin tur innebär att $f_A(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$. □

Notera formen på formeln A ovan. A är en disjunktion där varje disjunkt är en konjunktion av satssymboler och negationer till sådana. Formen kallas *disjunktiv normalform* och förkortas ofta DNF. Vi har visat att varje sanningsfunktion motsvaras av en formel i disjunktiv normalform. Eftersom varje formel definierar en sanningsfunktion har vi visat att det för varje formel finns en ekvivalent formel i disjunktiv normalform. Den här är emellertid inte unik. Om vi mekaniskt enligt beviset ovan konstruerar den disjunktiva normalformen för

$$p_0 \rightarrow p_1$$

får vi formeln

$$(p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1)$$

men det finns en ekvivalent mycket enklare formel

$$\neg p_0 \vee p_1$$

som också är i disjunktiv normalform. Notera att vi i normalformen godkänner disjunktioner och konjunktioner med bara en disjunkt eller konjunkt. Således är formlerna

$$\begin{array}{l} p_0 \\ p_0 \wedge p_1 \quad \text{och} \\ p_0 \vee p_1 \end{array}$$

alla i disjunktiv normalform.

Lemma 14 visar att varje konnektiv kan *definieras* med konnektiven $\neg$, $\wedge$ och $\vee$, dvs. varje konnektiv kan uttryckas med hjälp av en kombination av dehär konnektiven. En konnektivmängd som kan definiera alla sanningsfunktioner kallas *fullständig*. Vi har sett att $\{\neg, \wedge, \vee\}$ är fullständig. Vi kan enkelt observera att $\vee$ kan definieras med $\neg$ och $\wedge$:

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Således kan vi induktivt byta ut alla disjunktioner i en formel i disjunktiv normalform och visa att redan mängden $\{\neg, \wedge\}$ är fullständig. Vi kan t.o.m. hitta fullständiga konnektivmängder med bara ett konnektiv. Ett sådat exempel är Sheffers streck som vi stötte på tidigare. Fullständigheten av $\{|\}$ lämnas som övningsuppgift.