1.2 Sanningsvärden och sanningsvärdetabeller

Som tidigare konstaterats undersöker satslogiken påståenden som är antingen sanna eller falska. Det här är också den enda information satslogiken ser i atomära påståenden. Därför är det naturligt att satslogikens semantik, dvs. betydelsen i formlerna, bestäms av de sanningsvärden satssymbolerna har.

Definition 8. En *värdering* är en funktion $v : \{p_n : n \in \mathbb{N}\} \to \{0, 1\}$.

En värdering ger alltså varje satssymbol ett *sanningsvärde*: 1 (sann) eller 0 (falsk). Med sanningsvärdena för satssymbolerna bestämda kan vi induktivt definiera sanningsvärdena för godtyckliga satslogiska formler.

Definition 9. Låt A vara en satslogisk formel och v en värdering. Sanningsvärdet för A, $v(A)$, bestäms enligt följande:

1. Om A är p_n är $v(A)$ redan definierat.
2. Om A är $\neg B$ och $v(B)$ är definierat är $v(A) = 1$ om och endast om $v(B) = 0$.
3. Om A är $(B \wedge C)$ och $v(B)$ och $v(C)$ är definierade är $v(A) = 1$ om och endast om både $v(B) = 1$ och $v(C) = 1$.
4. Om A är $(B \vee C)$ och $v(B)$ och $v(C)$ är definierade är $v(A) = 1$ om och endast om åtminstone det ena av värdena $v(B)$ och $v(C)$ är 1.
5. Om A är $(B \to C)$ och $v(B)$ och $v(C)$ är definierade är $v(A) = 1$ om och endast om åtminstone det ena av villkoren $v(B) = 0$ eller $v(C) = 1$ uppfylls.
6. Om A är $(B \leftrightarrow C)$ och $v(B)$ och $v(C)$ är definierade är $v(A) = 1$ om och endast om $v(B) = v(C)$.

Ett enkelt sätt att åskådliggöra definitionen ovan är genom *sanningsvärdetabeller* (eller *sanningstabeller*). Tabell 1 visar sanningsvärdetabellerna för konnektiven.

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tabell 1: Sanningsvärdetabeller för konnektiven

Negationenes, konjunktionens och ekvivalensens sanningsvärden är mycket naturliga. De mindre självklara fallen är disjunktion och implikation.

För disjunktionen måste vi välja mellan två möjligheter. Satserna

> Utfärden inhiberas om det regnar eller är för kallt.
> I priset ingår en bulle eller en bakelse.

visar två möjliga användningar av "eller". I den första satsen är det knappast tänkt att utfärden blir av om det både regnar och är kallt. Här är "eller" *inklusivt* eller *inkluderande* dvs. det inbegriper fallen

> Det regnar.
> Det är för kallt.
> Det regnar och det är för kallt.

Den andra satsen är ett exempel på *uteslutande* "eller": i priset ingår en bulle eller en bakelse men inte båda. I logiken används $\vee$ för inklusivt "eller".

Implikationen $A \to B$ skulle vi intuitivt vilja definiera som "A leder till B". Eftersom semantiken bara ser till sanningsvärdena på A och B kan vi emellertid inte fånga så komplexa begrepp. Hur skall vi då definiera sanningsvärdet för $A \to B$? Idéen bakom definitionen är att vi fångar påståendet "om A är sann så är B sann". Det här förklarar sanningsdefinitionen i de fall A är sann. Det knepiga är hur vi skall tolka definitionen då A är falsk. Enligt definitionen är $A \to B$ då alltid sann. Ett sätt att förstå definitionen är att se på ett exempel:

> A: n är delbart med 4.
> B: n är jämt.

I det här fallet leder A faktiskt till B så då är det naturligt att kräva att $A \to B$ är sann oberoende av vad n är. Valen $n = 2$ och $n = 3$ ger oss då de rader i sanningsvärdetabellen där A är falsk.

Sanningsvärdetabeller är inte enbart behändiga för att visualisera konnektivens semantik. De ger oss också ett behändigt sätt att undersöka sanningsvärdena för en formel under *alla möjliga värderingar*. I kolumnerna längst till vänster räknar vi upp alla satssymboler som förekommer i formeln. Höger om dem skriver vi ut formeln så att varje satssymbol och konnektiv bildar en egen kolumn. Raderna i tabellen motsvarar alla möjliga sanningsvärdeskombinationer satssymbolerna kan få. Då vi fyller i tabellen börjar vi med att systematiskt lista de här kombinationerna under satssymbolerna till vänster. Sedan fyller vi stegvis i tabellens högra del enligt följande:

1. Skriv ut sanningsvärdena för satssymbolerna (kopiera dem från kolumnerna till vänster på samma rad).

2. Granska delformlerna i formeln. Då vi bestämt sanningsvärdena för de direkta delformlerna till en formel kan vi bestämma formelns sanningsvärde och skriva in det i kolumnen under huvudkonnektivet.

3. Upprepa steg 2 tills hela tabellen är ifylld.

Exempel 10. Vi konstruerar en sanningsvärdetabell för formeln $(\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1))$.

De satssymboler som förekommer i formeln är p_0 och p_1. Så vi börjar med att rita upp kolumnerna och fylla i sanningsvärdena för satssymbolerna.

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1		1		1			1			1
1	0		1		0			1			0
0	1		0		1			0			1
0	0		0		0			0			0

Sedan undersöker vi vilka delformler som har sanningsvärdena för de direkta delformlerna definierade. De är konjunktionen och negationerna till höger. Vi fyller i deras sanningsvärden:

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1		1	**1**	1		**0**	1		**0**	1
1	0		1	**0**	0		**0**	1		**1**	0
0	1		0	**0**	1		**1**	0		**0**	1
0	0		0	**0**	0		**1**	0		**1**	0

Nu kan vi fylla i negationen till vänster och disjunktionen:

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1	**0**	1	1	1		0	1	**0**	0	1
1	0	**1**	1	0	0		0	1	**1**	1	0
0	1	**1**	0	0	1		1	0	**1**	0	1
0	0	**1**	0	0	0		1	0	**1**	1	0

Sist fyller vi i ekvivalensen:

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1	0	1	1	1	**1**	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	**1**	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	**1**	1	0	1	1	0

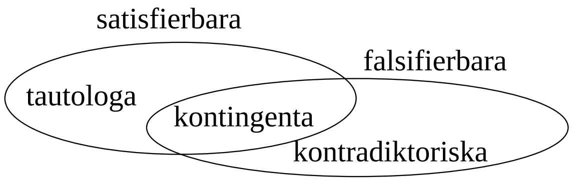
Vi märker att formeln $(\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1))$ har sanningsvärdet 1 oberoende av värdering. En sådan formel kallas *tautologi* (från grekiskans "tauto", samma och "logos", ord/idé). I vardagsspråk används termen tautologi om uttryck som inte innehåller någon ny information eftersom de alltid är sanna, t.ex. "Jag kommer eller jag kommer inte". Inom logiken är tautologier ändå till nytta eftersom vi kan använda dem för att omforma information till mer hanterbar form. Två formler A och B är *ekvivalenta* om $v(A) = v(B)$ för alla värderingar v. Ett annat sätt att uttrycka samma sak är att säga att formeln $A \leftrightarrow B$ är en tautologi. Vi kan alltså använda tautologier för att hitta ekvivalenta former för givna formler.

En formel är *satisfierbar* om det finns någon värdering som ger den sanningsvärdet 1. Alla tautologier är alltså satisfierbara, men det finns satisfierbara formler som inte är tautologier. Dessa är *kontingenta*, dvs. de är sanna enligt endel värderingar och falska enligt andra. Formler som är falska under åtminstone en värdering kallas *falsifierbara.* Bland de falsifierbara formlerna har vi specialfallet av formler som alltid är falska. De kallas *kontradiktoriska.* Figur 1 visar ett schema över de olika formelkategorierna.

Exempel 11. Tautologiska och därmed satisfierbara satser:

> Det regnar eller det regnar inte.
> $p_0 \to p_0$.
> $A \vee \neg A$.

Kontingenta och därmed både satisfierbara och falsifierbara satser:



Figur 1: Schema över formelkategorier

Det regnar.
$p_0 \wedge p_1$

Kontradiktoriska och därmed falsifierbara satser:

Det stämmer inte att han är antingen trött eller lat, men trött är han.
$A \wedge \neg A$
$(((p_0 \rightarrow p_1) \wedge p_0) \wedge \neg p_1)$

Ur logisk synpunkt är en av de viktigaste egenskaperna en formel har av vilken kategori den är. Kategorin kan man utläsa ur formelns sanningsvärdetabell. Det är emellertid inte en särskilt effektiv metod. Med n satssymboler får vi 2^n rader i tabellen. Det innebär att tabellens längd växer exponentiellt med antalet satssymboler i formeln vilket begränsar användbarheten av metoden. Vi skall senare på kursen lära oss ett par mer behändiga metoder.