Logik I
Institutionen för matematik och statistik
Våren 2013
Repetitionsuppgifter

Uppgifterna lämnas inte in. Vi försöker ordna någon timme handledning i räknestugan under provveckan, närmare info uppenbarar sig på nätsidan mot slutet av vecka 17.

1. Låt $L = \{E\}$, lexikonet för grafer. Uttryck följande egenskaper som predikatlogiska formler:
   (1) Det finns en nod som har alla övriga noder som grannar.
   (2) Varje nod har exakt två grannar.

2. Ge en modell och tolkning somsatisfierar formeln $R(x, y) \wedge \exists x R(x, F(x))$ men inte formeln $R(x, F(x))$.

3. Låt $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, R_0^{\mathcal{M}})$ där $R_0^{\mathcal{M}} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}, a - b \in \mathbb{P}\}$ och $\mathbb{P}$ är mänden av primtal. Visa utgående från Tarskis sanningsdefinition att $\mathcal{M} \models \neg\exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$.

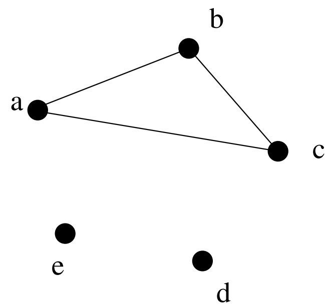
4. Visa att $\forall x A$ och $\neg\exists x \neg A$ är logiskt ekvivalenta.

5. Visa att $\forall x\ F(x) = x$ inte är en logisk konsekvens av $\forall x\ F(F(x)) = x$.

6. Visa att satsen $\forall x \exists y R(x, y) \vee \exists x \neg R(x, x)$ är valid.

7. Låt $A = R(x, y) \wedge \exists x R(x, y) \wedge \forall y P(y)$. Är följande formler definierade? Om de är det, vilka är de? Om de inte är det, varför inte?
   (1) $A(c/x)$
   (2) $A(x/y)$
   (3) $A(y/x)$
   (4) $A(c/y)$

8. Låt $\mathcal{G}$ vara följande graf:



   Visa att mängderna $\emptyset$, $\{a, b, c\}$ och $\{d, e\}$ är definierbara.

9. Granska funktionen $f(x) = x^2$ i $\mathbb{R}$. Visa att grafen (kuvaaja på finska) av f är en definierbar relation i $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

10. Härled $\neg\exists x P(x) \to \neg P(c)$.

11. Härled med naturlig deduktion från premissen $\forall x_0 \forall x_1 (R_0(x_0, x_1) \to (P_0(x_0) \wedge \neg P_0(x_1)))$ formeln
   (1) $\forall x_0 \neg R_0(x_0, x_0)$
   (2) $\neg\exists x_3 P_0(x_3) \to \neg\exists x_0 R_0(x_0, x_1)$

12. Visa att det inte finns en härledning av satsen $\exists y \forall x (R(x,y) \vee R(y,x)) \rightarrow (\exists y \forall x R(x,y) \vee \exists y \forall x R(y,x))$.

13. Finns det en härledning av $\exists x \forall y R(x,y) \vee \forall x \exists y \neg R(y,x)$? Bevisa svaret.

14. Konstruera med hjälp av ett semantiskt träd en modell för satsen $\forall x \exists y R(F(y),x) \wedge \neg \exists x R(F(x),x)$.

15. Konstruera med hjälep av ett semantiskt träd en modell för satsen $\forall x (P(x) \wedge \exists y R(x,y)$.

16. Ge ett semantiskt bevis för $\forall x R(F(x),x) \rightarrow \forall x \exists y R(y,x)$.

17. Låt $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}, F_0^{\mathcal{M}_1})$ och $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}, F_0^{\mathcal{M}_2})$ där $F_0^{\mathcal{M}_1}(n) = n+1$ och $F_0^{\mathcal{M}_2}(n) = n-1$ för varje $n \in \mathbb{Z}$. Visa att $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$ (dvs att $\mathcal{M}_1$ och $\mathcal{M}_2$ är isomorfa).