Logik I
Institutionen för matematik och statistik
Våren 2013
Övning 3

Sista inlämningsdag för uppgifterna: ons 30.1.2013
Sista inlämningsdag för korrigeringar: ons 13.2.2013

1. Använd sanningsvärdetabellmetoden för att utreda om $p_0 \to \neg p_0$ är tautolog, kontingent eller kontradiktorisk.

2. Använd sanningsvärdetabellmetoden för att utreda om $p_0 \vee \neg(p_0 \wedge p_1)$ är tautolog, kontingent eller kontradiktorisk.

3. Använd sanningsvärdetabellmetoden för att utreda om formlerna $p_0 \to p_1$ och $\neg(p_1 \to p_0)$ är satslogiskt ekvivalenta eller ej.

4. Använd sanningsvärdetabellmetoden för att utreda om formlerna $\neg p_0 \vee p_1$ och $\neg(p_0 \wedge p_1)$ är satslogiskt ekvivalenta eller ej.

5. Bevisa med hjälp av sanningsvärdetabellmetoden att följande formler är satslogiskt ekvivalenta: $\neg(A \wedge B)$ och $\neg A \vee \neg B$.

6. Bevisa med hjälp av sanningsvärdetabellmetoden att följande formler är satslogiskt ekvivalenta:
   (1) $\neg\neg A$ och A.
   (2) $A \wedge A$ och A.
   (3) $A \vee A$ och A.

7.* Bevisa med hjälp av sanningsvärdetabellmetoden att följande formler är satslogiskt ekvivalenta:
   (1) $A \to B$ och $\neg A \vee B$
   (2) $A \leftrightarrow B$ och $(A \to B) \wedge (B \to A)$

8. Bevisa med hjälp av sanningsvärdetabellmetoden att följande formler är satslogiskt ekvivalenta:
   (1) $A \wedge (B \vee C)$ och $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   (2) $A \vee (B \wedge C)$ och $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

9. Bevisa med hjälp av sanningsvärdetabellmetoden att följande formler är satslogiskt ekvivalenta:
   (1) $A \to (B \to C)$ och $B \to (A \to C)$
   (2) $A \to (B \to C)$ och $(A \wedge B) \to C$

10.* Vi betraktar sådana satslogiska formler som inte innehåller symbolerna $\to$ eller $\leftrightarrow$ och definierar för dem:
   (1) $(p_i)^+ = p_i, (p_i)^- = \neg p_i$
   (2) $(\neg A)^+ = A^-, (\neg A)^- = A^+$
   (3) $(A \wedge B)^+ = A^+ \wedge B^+, (A \wedge B)^- = A^- \vee B^-$
   (4) $(A \vee B)^+ = A^+ \vee B^+, (A \vee B)^- = A^- \wedge B^-$
   Formeln A^+ är formeln A:s **negation-normalform**. I den förekommer negationer enbart framför satssymboler. Vad är $(\neg((p_0 \wedge p_1) \vee p_2))^+$?

11. (forts. från föregående uppgift) Vi granskar fortfarande enbart satslogiska formler utan symbolerna $\to$ och $\leftrightarrow$.

Bevisa att A^+ och A är satslogiskt ekvivalenta. [Tips: Visa att $v(A^+) = v(A)$ och $v(A^-) = 1 - v(A)$ för alla formler A. Börja med fallet $A = p_i$. Antag sedan som induktionshypotes att $v(A^+) = v(A)$, $v(B^+) = v(B)$, $v(A^-) = 1 - v(A)$ och $v(B^-) = 1 - v(B)$. Granska sedan formlerna $\neg A$, $(A \wedge B)$ och $(A \vee B)$ och visa att påståendet stämmer för dem.]

12. (forts. från föregående uppgift) Vi granskar fortfarande enbart satslogiska formler utan symbolerna $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$.

    Bevisa att A^- och $\neg A$ är satslogiskt ekvivalenta. Det här visar att om en formel A inte innehåller symbolerna $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$ så är det lätt att hitta en formel, nämligen A^-, som är satslogiskt ekvivalent med negationen av A. [Tips: Observera att om du följde tipset i förra uppgiften så är denhär uppgiften speciellt enkel.]

13. Låt A vara en satslogisk formel och $p_0, \ldots, p_{n-1}$ de satssymboler som förekommer i A. Låt vidare A_i vara en satslogisk formel för varje $i = 0, \ldots, n-1$. Låt A' vara den formel man får då varje satssymbol p_i i A ersätts med formeln A_i. Visa att om A är en tautologi så är A' det också. [Tips: Antag att A är en tautologi och bevisa för varje v att $v(A') = 1$. Hur? Antag att v är given, dvs. v ger ett sanningsvärde för varje p_i. Definiera sedan en ny värdering v' med hjälp av formlerna A_i. Visa att $v(A') = v'(A)$ vilket ger $v(A') = 1$ eftersom A är en tautologi.]

14. Bevisa att $\{\rightarrow\}$ inte är en fullständig konnektivmängd. Tips: Visa först att varje konnektiv $f(x_1, \ldots, x_n)$ som kan definieras med $\rightarrow$ uppfyller $f(1, \ldots, 1) = 1$.

15. Ge exempel på en formel A vars sanningsfunktion f_A är:

x_0	x_1	x_2	$f_A(x_0, x_1, x_2)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1